





Ingénieur Civil des Mines
Département Informatique
Mémoire de recherche

Complexité descriptive des classes de Kůrka sur les groupes

Par **Juliette Favereau**

Sous la direction de :

Pierre Guillon et **Guillaume Theyssier**

Institut de Mathématiques de Marseille

Équipe : **GDAC**

All problems are undecidable but some problems are more undecidable than others

Résumé

Ce travail porte sur l'étude des automates cellulaires sur les groupes. Les automates cellulaires forment une famille de systèmes dynamiques définis par des règles locales, tandis que la théorie géométrique des groupes s'intéresse à la géométrie des groupes à grande échelle. Nous cherchons à étudier les liens entre la géométrie de l'espace, en l'occurrence, un groupe, et la dynamique générale de ses automates cellulaires. En particulier, nous nous intéressons à la conjecture suivante : les seuls groupes pour lesquels l'existence de points d'équicontinuité est équivalente à l'absence de sensibilité aux conditions initiales sont les groupes virtuellement cycliques, c'est-à-dire, en un certain sens, les groupes unidimensionnels.

Nous montrons que, sur le groupe libre, ces deux propriétés présentent des niveaux de difficulté calculatoire différents et par conséquent l'une ne peut pas être la négation de l'autre. Nous étudions ensuite les groupes non moyennables, c'est à dire possédant une structure arborescente, et tentons de généraliser ces résultats.

Plusieurs autres propriétés dynamiques sont également examinées. Enfin, la dernière partie du document présente des pistes ainsi qu'un schéma de preuve visant à établir un résultat analogue pour les groupes à un bout dont le problème du mot est décidable.

Abstract

This work studies cellular automata on groups. We consider the following conjecture: the only groups for which the existence of equicontinuity points is equivalent to the absence of sensitivity to initial conditions are the virtually $\mathbb{Z}$ groups.

We show that, on the free group, these two properties have different computational complexities, so one cannot be the negation of the other. We then study non-amenable groups (groups with a tree-like structure) and try to generalize this result.

We also study several other dynamical properties. Finally, we present some ideas and a proof scheme for a similar result on one-ended groups with decidable word problem.

Remerciements

Je remercie Pierre Guillon et Guillaume Theyssier de m'avoir accueillie en stage et de m'avoir laissée une grande liberté dans le choix de mon sujet.

Je remercie l'Institut de Mathématiques de Marseille pour son accueil chaleureux durant ce stage.

Je remercie Victor Lutfalla and Xavier Goaoc ainsi que les autres relecteur.ices qui accepteront de rapporter ce travail.

Je remercie enfin Kévin Pérrot et Étienne Miquey de m'avoir permis d'intégrer ce master et pour la confiance qu'ils m'ont accordée, malgré le dépassement de la date limite d'inscription.

Je remercie aussi Emma.

Table des matières

Résumé i

Abstract ii

Remerciements iii

1 Présentation du contexte du stage 1

2 Introduction 2

3 Généralité sur les groupes et leur géométrie 3
- 3.1 Définitions . . . 4
- 3.2 Moyennabilité . . . 5
- 3.3 Action de Groupe . . . 6
- 3.4 Bouts de groupe . . . 7

4 Généralité sur les systèmes symboliques 8
- 4.1 Définitions . . . 8
- 4.2 Sous-shift . . . 9
- 4.3 Morphisme et fonction locale . . . 10
- 4.4 Automates Cellulaires . . . 11

5 Rappels de calculabilité 11
- 5.1 Définitions . . . 12
- 5.2 Machines à oracle et hiérarchie analytique . . . 13
- 5.3 Hiérarchies arithmétique et analytique . . . 13
- 5.4 Problèmes canoniques utiles . . . 14

6 Sensibilité et stabilité 15
- 6.1 Définitions . . . 15
- 6.2 Contre-exemples . . . 17
  - 6.2.1 Téléphérique vas-et-viens . . . 18
  - 6.2.2 Téléphérique avec attente . . . 18
- 6.3 Traces . . . 19
- 6.4 Liens avec les traces . . . 19

7 Résultats principaux 21
- 7.1 Sensibilité . . . 21
- 7.2 Point d'équicontinuité . . . 28

8 Perspectives futures 31
- 8.1 Groupes non moyennable . . . 31
- 8.2 Groupes à un bout . . . 32

9 Conclusion 35

1 Présentation du contexte du stage

Mon projet de fin d'études a été réalisé à l'Institut de Mathématiques de Marseille (I2M), un laboratoire de recherche rattaché à Aix-Marseille Université (AMU) et placé sous cotutelle avec le CNRS. Aix-Marseille Université assure à la fois une mission d'enseignement, à laquelle nous sommes habitué.es en tant qu'étudiant.es, et une mission de recherche, dans laquelle s'inscrit mon stage. Ce stage avait pour objectif une formation à la recherche, en vue d'une poursuite en doctorat. Il s'agissait donc d'aborder de manière relativement autonome un sujet de recherche, sur un temps long, tout en m'appuyant sur mes deux encadrants.

Le Centre National de la Recherche Scientifique (CNRS) joue un rôle important dans la recherche académique publique en France. Il collabore notamment avec les universités au sein de laboratoires communs. Il contribue également à l'organisation d'un tissu académique national au travers de groupes de travail et de rencontres autour de différentes thématiques. Le groupe dans lequel s'inscrivait mon travail est Systèmes Dynamiques, Automates et Algorithmes (SDA2), lui-même rattaché au Groupement de Recherche Informatique Fondamentale et ses Mathématiques (GDR IFM). Je n'ai malheureusement pas eu la possibilité de participer aux journées nationales de ce groupe de travail. L'organisation de telles journées, ainsi que de nombreux séminaires, montre cependant que la recherche n'est pas un travail solitaire, bien au contraire.

Mon stage s'est déroulé à l'Institut de Mathématiques de Marseille, le laboratoire de mathématiques d'Aix-Marseille Université. Ce laboratoire est de grande taille et regroupe des chercheur.euses et enseignant.es-chercheur.euses travaillant sur des thématiques très diverses. Cette pluralité m'a permis de discuter de mathématiques bien au-delà de mon champ de compétence, ainsi que d'élargir ma culture scientifique en assistant à de nombreux séminaires. J'ai également pu entretenir de bonnes relations avec les membres du laboratoire, notamment les doctorant.es et les postdoctorant.es.

J'ai été accueillie pour mon stage dans l'équipe Géométrie, Dynamique, Arithmétique, Combinatoire et leurs interactions (GDAC), dirigée par Nicolas Bédaride et Julien Cassaigne. Cette équipe se caractérise par sa taille importante ainsi que par la diversité de ses thématiques. Mon stage s'inscrit particulièrement bien dans la partie « interactions », c'est-à-dire à l'interface de plusieurs de ces domaines. Mon stage s'intitule : Complexité descriptive des classes de Kůrka sur les groupes. Il mobilise à la fois des notions de géométrie et de combinatoire, à travers l'étude des graphes de Cayley, ainsi que de dynamique, via l'étude des automates cellulaires et de leurs propriétés chaotiques. Ces aspects seront développés dans la section suivante.

Mon stage a été encadré par Guillaume Theyssier et Pierre Guillon, tous deux rattachés au CNRS. Ensemble, nous avons discuté régulièrement, travaillé au tableau et confronté nos idées. Cela a conduit à un raffinement progressif des questions que nous nous posions. J'ai eu l'opportunité de participer à la vie scientifique du laboratoire en assistant à un séminaire d'équipe chaque semaine, le vendredi, à un séminaire thématique régulièrement le mardi, ainsi qu'aux séminaires des doctorant.es. J'ai d'ailleurs eu l'occasion de faire une présentation lors d'un séminaire de doctorant.es ainsi que pendant les journées d'équipe.

Ce stage m'a permis de mieux comprendre la manière dont se structure la recherche scientifique, en particulier en mathématiques. Mon travail a comporté une dimension bibliographique importante, nécessaire à l'obtention de résultats personnels. Plus précisément, j'ai travaillé à adapter une preuve issue d'un de mes résultats antérieurs sur le groupe $\mathbb{Z}^2$ au cadre du groupe libre $\mathbb{F}_2$. Cela sera développé dans la section suivante.

2 Introduction

Les automates cellulaires sont à la fois un modèle de calcul et une famille de systèmes dynamiques. Ils ont été introduits par von Neumann et Ulam [Bur66] dans le but d'étudier des phénomènes de croissance et d'auto-reproduction, plus précisément, von Neumann s'est intéressé à la question de l'auto-réplication, tandis qu'Ulam travaillait sur des problèmes liés à la croissance des cristaux. Intuitivement, un automate cellulaire décrit l'évolution d'un système discret sur une grille au moyen de règles locales. Le plus célèbre exemple est sans doute le jeu de la vie de Conway, qui a largement contribué, avec les travaux de Wolfram, à populariser les automates cellulaires [Wol83]. Par ailleurs le lien entre les automates cellulaires et la calculabilité a également été introduit très tôt, notamment par Banks [Ban71].

L'étude des automates cellulaires comme systèmes dynamiques présente un intérêt particulier, notamment parce que de nombreux systèmes physiques peuvent être modélisés par des dynamiques locales sur des réseaux. Ce point de vue s'inscrit naturellement dans le cadre de la dynamique symbolique, à l'interface entre mathématiques discrètes et théorie des systèmes dynamiques qui a été développée notamment par Morse et Hedlund. On trouvera une excellente introduction à la dynamique symbolique dans l'ouvrage de Lind et Marcus [LM95]. Le lien entre automates cellulaires et dynamique symbolique a été fait dans un papier fondateur de Hedlund, qui caractérise les automates par des propriétés dynamiques et topologiques [Hed69].

La théorie des automates cellulaires en tant que systèmes dynamiques s'est ensuite développée suivant plusieurs directions. D'une part, un courant ergodique et probabiliste, initié notamment par Toom puis poursuivi par Gács, s'est intéressé à la resistence de système au bruit et aux perturbations [Too80, Gác01]. D'autre part, une approche topologique, dans laquelle s'inscrit ce mémoire, a été développée par Kůrka dans plusieurs travaux [Kůr01, Kůr03, Kůr97].

Le travail de Kůrka porte principalement sur les automates cellulaires définis sur la droite discrète $\mathbb{Z}$. Or, comme le montre déjà l'exemple du jeu de la vie, il est tout à fait naturel de considérer aussi des automates cellulaires définis sur $\mathbb{Z}^2$, c'est-à-dire sur des grilles bidimensionnelles. Plus généralement, on peut les définir sur $\mathbb{Z}^d$ pour tout entier $d \geq 1$. Cela conduit naturellement à la question suivante : peut-on définir des automates cellulaires sur des graphes plus généraux ?

D'une certaine manière, oui. Cependant, pour conserver beaucoup de propriétés importantes, il faut préserver l'idée de localité, qui est au cœur de la définition. Cela impose que tous les sommets du graphe aient le même type de voisinage, et plus généralement que le graphe présente suffisamment de symétries pour que la même règle locale puisse s'appliquer partout de manière uniforme. Le cadre naturel pour cela est celui des graphes de Cayley, et donc des groupes finiment engendrés.

La théorie des automates cellulaires sur les groupes est exposée en détail dans l'ouvrage de Ceccherini-Silberstein et Coornaert *Cellular Automata and Groups* [CSC10]. Ce point de vue présente plusieurs intérêts. D'une part, il permet de contrôler plus finement la géométrie du support sur lequel évolue le système, et donc de modéliser des contraintes plus variées que celles offertes par les grilles euclidiennes classiques. D'autre part, comme cela apparaît à plusieurs reprises dans *Cellular Automata and Groups*, l'étude de la dynamique des automates cellulaires sur un groupe renseigne également sur la géométrie du groupe lui-même. L'objectif de ce travail est de poursuivre dans cette direction, en mettant en évidence des liens entre la dynamique des automates cellulaires et la géométrie des groupes sur lesquels ils agissent.

Plus précisément, nous nous intéresserons à un résultat classique connu sous le nom de dichotomie de Kůrka.

Théorème 2.1 (Dichotomie de Kůrka [Kůr97])**.** *Soit F un automate cellulaire sur $\mathbb{Z}$. Alors les propositions suivantes sont équivalentes :*

- *F n'est pas sensible aux conditions initiales*
- *F possède un point d'équicontinuité*
- *F est presque équicontinu*

Ce théorème joue un rôle central dans la théorie dynamique des automates cellulaires sur $\mathbb{Z}$. Cependant, il a été montré qu'il est faux pour les automates cellulaires sur $\mathbb{Z}^2$ [ST11], puis plus récemment sur le groupe libre à deux générateurs $\mathbb{F}_2$ [AT26].

Un résultat fondamental de théorie géométrique des groupes, le théorème de Stallings [Sta68], montre qu'il n'existe que trois géométries possibles pour les groupes infinis : les géométries unidimensionnelles, qui ressemblent à $\mathbb{Z}$, les géométries arborescentes qui ressemblent à $\mathbb{F}_2$ et le reste qui ressemblent (plus ou moins) à $\mathbb{Z}^2$.

Conjecture 1 (Theyssier et Bitar [Bit24])**.** *Les seuls groupes sur lesquels la dichotomie de Kůrka reste vraie sont les groupes virtuellement cycliques.*

L'objet de ce mémoire est précisément l'étude de cette conjecture.

Nous démontrons tout d'abord le résultat suivant.

Théorème A. *Sur le groupe libre, la sensibilité aux conditions initiales des automates cellulaires est une propriété arithmétique, plus précisément Σ_3^0-complète.*

Nous établissons ensuite le théorème suivant.

Théorème B. *Sur le groupe libre, l'existence de points d'équicontinuité pour un automates cellulaires est une propriété analytique, plus précisément Σ_1^1-complète.*

Puisque ces deux propriétés apparaissent à des niveaux différents de la hiérarchie descriptive, on en déduit immédiatement le corollaire suivant.

Théorème C. *Sur le groupe libre, il existe des automates cellulaires non sensibles ne possédant aucun point d'équicontinuité.*

Notons que ce théorème était déjà connu [AT26]. De plus, nous donnons une construction explicite d'un tel automate.

La section 3 rassemble les rappels de théorie des groupes ainsi que les outils géométriques qui seront utilisés par la suite. La section 4 introduit les définitions relatives aux automates cellulaires sur un groupe arbitraire. La section 5 présente les bases de la théorie de la calculabilité et de la théorie descriptive des ensembles nécessaires à notre étude. La section 6 introduit les notions de stabilité et d'instabilité qui nous intéresseront, en particulier la sensibilité aux conditions initiales et les points d'équicontinuité. La section 7 est consacrée à la démonstration des théorèmes A, B et C. Enfin, la section 8 présente des perspectives futures sur les groupes non moyennables et les groupes à un bout avec un problème du mot décidable. En fonction de sa propre expertise le lecteur pourra librement sauter les premières sections.

3 Généralité sur les groupes et leur géométrie

Le but de cette section est d'introduire tous les outils relatifs aux groupes dont nous aurons besoin pour traiter les automates cellulaires dans la suite. On commence par donner les définitions générales d'un groupe et de son graphe de Cayley. Par la suite, on introduit les notions de moyennabilité ainsi que de bouts pour les groupes. Enfin on lie ces différentes notions géométriques à la notion de quasi-translation de Whyte [Why99].

3.1 Définitions

Définition 3.1 (Groupe)**.** *Un* ***groupe*** $(G, \cdot)$ *est un ensemble muni d'une fonction* $\cdot : G^2 \to G$ *qui vérifie les propriétés suivantes :* $\cdot$ *est associative, Il existe* $\varepsilon \in G$ *tel que pour tout* $x \in G$ *on a* $x \cdot \varepsilon = \varepsilon \cdot x = x$ *et pour tout* $x \in G$ *il existe* $x^{-1} \in G$ *tel que* $xx^{-1} = x^{-1}x = \varepsilon$*.*

Définition 3.2 (Groupe finiement engendré)**.** *On dit qu'un groupes* G *est* ***finiement engendré*** *s'il existe* $S \subset G$ *fini tel que pour tout* $x \in G$ *il existe* $s_1, \cdots, s_n \in S \cup S^{-1}$ *tel que* $x = s_1 \cdot s_2 \cdots s_n$*.*

Définition 3.3 (Graphe de Cayley)**.** *Étant donné* G *un groupe finiement engendré et* S *un ensemble de générateurs, on définit son* ***graphe de Cayley*** *relativement à* S *par* $C_G^S = (V = G, E = \{(x, xs) | x \in G, s \in S\}$*. On ne précisera pas* S *lorsqu'il est clair.*

Dans toute la suite, tous les groupes que nous considérerons seront finiment engendrés. On omettra de mentionner S lorsqu'il est clair dans le contexte.

Proposition 3.4. *Étant donné* G *un groupe et* S *un ensemble de générateurs.* C_G^S *est fortement connexe.*

Démonstration. Étant donné x et y deux éléments de G. Comme S engendre G, l'élément $x^{-1}y$ s'écrit comme un produit fini d'éléments de S et de leurs inverses. Il existe donc $s_1, \ldots, s_n \in S \cup S^{-1}$ tels que $x^{-1}y = s_1 \cdots s_n$. En multipliant à gauche par x, on obtient $y = xs_1 \cdots s_n$. Considérons maintenant la suite de sommets

$$x, xs_1, xs_1s_2, \ldots, xs_1 \cdots s_n = y.$$

Par définition du graphe de Cayley, pour tout $i \in [1, \ldots, n]$, il existe une arête

$$xs_1 \cdots s_{i-1} \longrightarrow xs_1 \cdots s_i$$

On a donc construit un chemin orienté de x vers y, x et y étant arbitraire cela achève la preuve. □

Le graphe de Cayley induit donc naturellement une notion de distance, que l'on appellera la distance du mot telle que pour x et y dans G, $d(x, y)$ est la distance du plus court chemin entre x et y dans le graphe de Cayley.

Définition 3.5 (Sous-groupe normal)**.** *Soit* G *un groupe et* H *un sous-groupe de* G*,* H *est* ***normal*** *si*

$$\forall h \in H, g \in G, ghg^{-1} \in H$$

Définition 3.6 (Propriété virtuelle)**.** *Pour une propriété* P*, un groupe* G *est* ***virtuellement*** P *s'il existe* H *un sous-groupe normal de* G *tel que* H *a la propriété* P *et* H *est d'indice fini c'est-à-dire que le quotient* G/H *est fini.*

Définition 3.7 (Groupe libre)**.** *On appelle* ***groupe libre*** *à* n *générateurs le groupe* $\mathbb{F}_n$ *engendré par un ensemble* $S = \{s_1, \ldots, s_n\}$ *sans autres relations que celles imposées par l'existence des inverses, c'est-à-dire* $s_i s_i^{-1} = e = s_i^{-1} s_i$ *pour tout* i*.*

Dans le cas de $\mathbb{F}_2$, le groupe libre à 2 générateur, on notera ses 2 générateur a et b.

Remarque 1. *Cette définition peut être comprise d'un point de vue géométrique dans le graphe de Cayley. Le fait qu'il n'y ai aucune relation autre que les relations d'inverse implique que le graphe ce Cayley est acyclique, en particulier il est connexe par la proposition précédente. C'est donc un arbre.*

Proposition 3.8 (Propriété universelle)**.** *Le groupe libre à n générateurs $S = \{s_1, \cdots, s_n\}$ est le seul groupe contenant S. Tel que pour tout groupe G et toute application $f : S \to G$, f se prolonge de manière unique en un morphisme $F : \mathbb{F}_n \to G$.*

Démonstration. Soit F_n le groupe libre engendré par $S = \{s_1, \ldots, s_n\}$. Par définition, tout élément de F_n s'écrit comme un mot réduit en les lettres $s_1^{\pm 1}, \ldots, s_n^{\pm 1}$.

Soit G un groupe et $f : S \to G$ une fonction. Le seul morphisme pouvant prolonger f est alors $F : \mathbb{F}_n \to G$ en posant, pour tout mot

$$w = s_{i_1}^{\varepsilon_1} \cdots s_{i_k}^{\varepsilon_k}, \varepsilon_j \in \{\pm 1\},$$

$$F(w) = f(s_{i_1})^{\varepsilon_1} \cdots f(s_{i_k})^{\varepsilon_k}.$$

F est bien un morphisme puisque pour tout $w = s_{i_1} \cdots s_{i_k}$, on a $w \neq \varepsilon$ car le groupe libre n'a aucune relation et donc les $f(s_{i_j})$ peuvent être choisit arbitrairement.

De plus $\mathbb{F}_n$ est unique puisque si F'_n est un autre groupe vérifiant la propriété universelle avec $S' \subset F'_n$ et $S' = \{s'_1, \cdots, s'_n\}$ alors par la propriété universelle il existe un unique $\phi : \mathbb{F}_n \to F'_n$ et un unique $\psi : F'_n \to \mathbb{F}_n$ tel que $\phi(S) = S'$ et $\psi(S') = S$. On remarque que

$$\psi \circ \phi(S) = S\phi \circ \psi(S') = S'$$

Par la propriété universelle on a que $\psi \circ \phi = \phi \circ \psi = \mathrm{id}$ donc $\mathbb{F}_n$ est unique.

□

3.2 Moyennabilité

Définition 3.9 (Groupe moyennable)**.** *Un groupe G est dit **moyennable** s'il existe une suite $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de sous-ensembles finis non vides de G, appelée séquence de Følner, telle que, pour tout $g \in G$,*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|gK_n \Delta K_n|}{|K_n|} = 0,$$

où Δ désigne la différence symétrique.

Exemple 3.1. *Le groupe $\mathbb{Z}^d$ est moyennable pour tout d.*

Démonstration. Posons $K_n = \{x \in \mathbb{Z}^n : \max_{1\leq i\leq n} |x_i| \leq n\}$ la boule de centre ε et de rayon n pour la norme infinie. K_n est une suite de sous-ensembles finis non vides de $\mathbb{Z}^d$, et $|K_n| = (2n+1)^d$. Soit $v =\in \mathbb{Z}^d$. Pour tout $n \geq |v|$, on a

$$K_{n-|v|} \subset K_n \cap (v + K_n) \text{ et } K_n \cup (v + K_n) \subset K_{n+|v|}.$$

On en déduit que

$$(v + K_n)\Delta K_b \subset K_{n+|v|} \setminus K_{n-|v|}.$$

Par conséquent,

$$|(v + K_n)\Delta K_b| \leq |K_{n+lv|}| - |K_{n-|v|}| = (2m + 2c + 1)^d - (2m - 2c + 1)^d.$$

En divisant par $|K_n| = (2n + 1)^d$, on obtient

$$\frac{|(v + K_n)\Delta K_n|}{|K_n|} \leq \frac{(2n + 2|v| + 1)^d - (2n - 2|v| + 1)^d}{(2n + 1)^d}.$$

Donc

$$\lim_{m\to\infty} \frac{|(v+K_m)\Delta K_m|}{|K_m|} = 0.$$

Ce qui prouve que $\mathbb{Z}^d$ est moyennable. □

Exemple 3.2. *Le groupe $\mathbb{F}_2$ est non moyennable.*

Démonstration. Soient a, b deux générateurs de $\mathbb{F}_2$, et $S = \{a, a^{-1}, b, b^{-1}\}$. Considérons le graphe de Cayley de $\mathbb{F}_2$ relativement à S.

Lemme 3.10. *Soit $K \subset \mathbb{F}_2$, notons $\partial K = SK \setminus K$ l'ensemble des sommets ayant un voisin de K.*

$$|\partial K| > 2|K|$$

Démonstration. Soit $K \subset \mathbb{F}_2$, on assimile ∂K à l'ensemble des arêtes ayant une extrémité dans K et l'autre non. Comme le graphe induit par K est une forêt, il possède au plus $|K| - 1$ arêtes internes. Or la somme des degrés des sommets de K vaut $4|K|$. Donc

$$4|K| = 2\,(\text{nombre d'arêtes internes}) + |\partial K| \leq 2(|K| - 1) + |\partial K|.$$

Il vient

$$|\partial K| \geq 2|K| + 2 > 2|K|.$$

□

D'autre part, on peut décomposer le bord suivant les générateurs, $|\partial K| = \sum_{s\in S} |sK \setminus K|$.
Il existe donc $s \in S$ tel que

$$|sK \setminus K| \geq \frac{|\partial K|}{4} \geq \frac{|K|}{2}.$$

Comme $sK \setminus K \subset sK\Delta K$, on obtient $|sK\Delta K| \geq \frac{|K|}{2}$.
Ainsi, pour toute partie finie non vide $K \subset \mathbb{F}_2$, il existe $s \in S$ tel que

$$\frac{|sK\Delta K|}{|K|} \geq \frac{1}{2}.$$

Une suite de Følner ne peut donc pas exister. Par conséquent, $\mathbb{F}_2$ n'est pas moyennable. □

3.3 Action de Groupe

Définition 3.11 (Action de groupe)**.** *Étant donné X un ensemble et G un groupe, une **action** de G sur X est un morphisme de $G \to \mathfrak{S}(X)$ ou $\mathfrak{S}(X)$ est l'ensemble des permutations de X.*

Définition 3.12 (Quasi-translation)**.** *Étant donné X un espace métrique et G un groupe, une action f de G sur X est une **quasi-translation** si elle respecte :*

- *L'action est libre, c'est à dire $f^g(x) = x$ si et seulement si $g = \varepsilon$.*
- *Pour tout g, l'ensemble $\{d(x, f^g(x)|x \in X\}$ est borné.*

Une quasi-translation peut à priori être très irrégulière. C'est un analogue géométrique de la notion de sous-groupe. Par exemple la Figure 1 donne un extrait d'une quasi-translation de $\mathbb{Z}$ sur $\mathbb{Z}^2$.

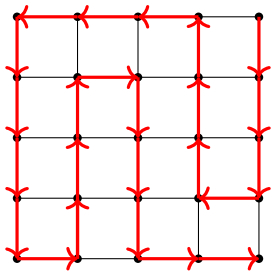


FIGURE 1 : Extrait d'une quasi-translation de $\mathbb{Z}$ sur $\mathbb{Z}^2$.

Définition 3.13 (Action transitive)**.** *Une action f de G sur X est **transitive** si pour tout $x, y \in X$ il existe $g \in G$ tel que $f^g(x) = y$.*

Théorème 3.14 (Seward [Sew14])**.** *Un groupe est non moyennable si et seulement si il admet une action par quasi-translation de $\mathbb{F}_2$*

3.4 Bouts de groupe

Définition 3.15 (Bouts)**.** *On appelle nombre de **bout** d'un groupe, la quantité*

$$\lim_n \text{ nombre de composante connexe infinie de } G \setminus B_n(\varepsilon)$$

Théorème 3.16 (Stallings [Sta68])**.** *Il n'existe que quatre valeurs possibles pour les bouts d'un groupe, 0, 1, 2 ou $+\infty$. De plus les groupes à 0 bouts sont les groupes finis et ceux 2 bouts sont exactement les groupes virtuellement $\mathbb{Z}$.*

Remarque 2. *En réalité, on sait également caractériser les groupes à une infinité de bouts, ce sont les produits libres amalgamés sur un groupe fini et les HNN extensions sur un groupe fini. Un théorème également dû à Stallings.*

Exemple 3.3. *Le groupe $\mathbb{Z}^2$ a un bout.*

Exemple 3.4. *Le groupe $\mathbb{F}_2$ a une infinité de bouts.*

Démonstration. Le graphe de Cayley de $\mathbb{F}_2$ est un arbre 4-régulier. Fixons $n \geq 1$ et regardons le complémentaire de la boule $B_n(e)$. Comme le graphe est un arbre, tout sommet de la sphère $S_{n+1}(e) = \{g \in \mathbb{F}_2 : d(e, g) = n + 1\}$ est relié à l'origine par un unique chemin géodésique. En particulier, chacun de ces sommets possède exactement une arête vers l'intérieur de la boule.

En supprimant $B_n(e)$, chaque sommet de $S_{n+1}(e)$ donne naissance à une composante connexe infinie distincte du complémentaire. Puisque deux chemins issus de deux sommets distincts de $S_{n+1}(e)$ ne peuvent se rejoindre à l'extérieur de $B_n(e)$ sans créer de cycle.

Ainsi, le nombre de composantes connexes infinies de $\mathbb{F}_2 \setminus B_n(e)$ est exactement le cardinal de la sphère $S_{n+1}(e)$, qui vaut $|S_{n+1}(e)| = 4 \cdot 3^n$. Donc $\mathbb{F}_2$ a une infinité de bouts. □

Proposition 3.17. *Tout groupe G ayant une infinité de bouts est non moyennable.*

Démonstration. Christophe Pittet [Pit98] montre que tout graphe de degré uniformément borné ayant au moins trois bouts satisfait la propriété suivante : pour toute partie finie K, il existe $\varepsilon > 1$ tel que

$$|\partial K| \geq \varepsilon |K|.$$

Les graphes de Cayley d'un groupe à une infinité de bouts satisfont ces hypothèses. Une telle inégalité empêche alors l'existence d'une suite de Følner. Le groupe G est donc non moyennable. □

Exemple 3.5. *Un groupe $\mathcal{B}^n$ est dit de Burnside d'exposant n si $\mathcal{B}^n$ est infini et pour tout g dans $\mathcal{B}^n$ on a $g^n = e$. Les groupes de Burnside ont un seul bout.*

Démonstration. Le groupe $\mathcal{B}^n$ est infini donc il n'a pas 0 bout. De plus, tous ses élément sont de torsion donc il ne contient pas $\mathbb{Z}$ comme sous-groupe, en particulier comme sous-groupe d'indice fini donc il n'a pas 2 bouts.

Supposons qu'il ait une infinité de bouts, alors par le théorème de Stallings [Sew14], soit $\mathcal{B}^n = A *_F B$ avec F un groupe fini auquel cas prenons $a \in A \setminus F$ et $b \in B \setminus F$ ce qui est possible car F est fini. L'élément ab est alors d'ordre infini. Soit $\mathcal{B}^n$ est une HNN extension auquel cas la nouvelle lettre t est d'ordre infini. Il vient donc nécessairement que $\mathcal{B}^n$ a un seul bout. □

Remarque 3. *Ici on suppose que de tels groupes existent, ce qui à priori n'a rien d'évident et est un problème très difficile.*

Théorème 3.18 (Seward [Sew14])**.** *Tout groupe à un bout admet une action transitive par quasi-translation de $\mathbb{Z}$.*

4 Généralité sur les systèmes symboliques

Cette section est une introduction à l'étude des systèmes dynamiques symboliques, c'est à dire des système dynamique discret en temps et en espace. L'étude de tels systèmes est très naturelle puisque la simulation de systèmes dynamiques par ordinateur nécessite de discrétiser le temps et l'espace. Les représentants canoniques de tels systèmes dynamiques sont les pavages ainsi que leurs morphismes : les automates cellulaires.

4.1 Définitions

Définition 4.1 (Système dynamique)**.** *Un **système dynamique** est un couple (X, F) où X est un espace compact métrique et F est une fonction continue. On s'intéresse alors aux itérations de la fonction F.*

Définition 4.2 (Espace Symbolique)**.** *Soient A un alphabet fini et G un groupe. On définit l'**espace symbolique** sur A et G par $A^G := \{x : G \to A\}$. On munit A de la topologie discrète (tout ensemble est ouvert), et A^G de la topologie produit. On considère l'action à droite de G sur A^G par translation :*

$$\sigma : G \times A^G \to A^G, (\sigma^g(x))(h) = x(hg^{-1}),$$

*pour tous $g, h \in G$ et $x \in A^G$. Le système dynamique (A^G, σ) est appelé le **full shift**.*

Proposition 4.3. *L'espace symbolique est toujours compact.*

Démonstration. A est fini et discret donc compact et un produit de compact est toujours compact par le théorème de Tychonoff [Bou07]. □

Définition 4.4 (Cylindres)**.** *Soit K un sous-ensemble fini de G et $\pi \in A^K$ un motif de support K. On définit le **cylindre** $[\pi] := \{x \in A^G | x_{|K} = \pi\}$.*

Proposition 4.5. *Les cylindres $[\pi]$, avec K fini, forment une base d'ouvert pour la topologie.*

Démonstration. Par définition de la topologie produit, une base est donnée par les ensembles de la forme $\bigcap_{i=1}^{m} \pi_{g_i}^{-1}(U_i)$, où $g_1, \dots, g_m \in G$, où $\pi_g : A^G \to A$ est la projection $\pi_g(x) = x(g)$, et où chaque $U_i \subset A$ est ouvert.

Comme A est discret, tout sous-ensemble U_i est ouvert, en particulier, les singletons $\{a\}$ sont ouverts. En posant $K = \{g_1, \dots, g_m\}$ et en définissant $\pi \in A^K$ par $\pi(g_i) = a_i$, on obtient précisément

$$\bigcap_{i=1}^{m} \pi_{g_i}^{-1}(\{a_i\}) = [\pi].$$

Donc $\bigcap_{i=1}^{m} \pi_{g_i}^{-1}(U_i) = \bigcup_k [\pi_k]$ puisque chaque U_i est une union finie de singleton.

□

On notera $B_n(x) = [x_{B_n}]$ le cylindre de x porté par la boule de rayon n dans le graphe de Cayey.

4.2 Sous-shift

Définition 4.6 (Sous-shift)**.** *Un **sous-shift** est un sous-ensemble $X \subset A^G$ qui est fermé et stable par translation, i.e.*

$$\forall g \in G, \sigma^g(X) = X.$$

Définition 4.7 (Langage)**.** *Soit $X \subset A^G$ un sous-shift. Un mot ou motif w est un élément de A^K pour un certain $K \subset G$ fini. On dit que w apparaît dans $x \in A^G$ s'il existe $g \in G$ tel que $(\sigma^g x)_{|K} = w$. On le note $w \sqsubset x$. Le **langage** de X est*

$$\mathcal{L}(X) = \{w \in A^K | \exists x \in X, w \sqsubset x\}.$$

Théorème 4.8 (Caractérisation)**.** *Un sous-ensemble $X \subset A^G$ est un sous-shift si et seulement s'il existe une famille de motifs interdits $\mathcal{F}$ telle que $X = X_{\mathcal{F}} = \{x \in A^G | \forall w \in \mathcal{F}, w \not\sqsubset x\}$.*

Démonstration. Soit $X \subset A^G$ un sous-shift. Alors X est fermé, donc $A^G \setminus X$ est ouvert. Soit $y \in A^G \setminus X$. Comme les cylindres forment une base d'ouverts, il existe un sous-ensemble fini $K_y \subset G$ tel que le cylindre $[y|_{K_y}]$ vérifie $[y|_{K_y}] \subset A^G \setminus X$. Posons alors $\mathcal{F} = \{ y|_{K_y} \mid y \in A^G \setminus X\}$. Soit $x \in X$. Supposons qu'il existe $w \in \mathcal{F}$ tel que $w \sqsubset x$. Par définition de $\sqsubset$, il existe $g \in G$ tel que $(\sigma^g x)|_{\mathrm{supp}(w)} = w$, donc $\sigma^g x \in [w]$. Comme $w \in \mathcal{F}$, on a $w = y|_{K_y}$ pour un certain $y \in A^G \setminus X$, et donc $[w] \subset A^G \setminus X$. Ainsi $\sigma^g x \notin X$. Mais X est stable par translation, donc $\sigma^g x \in X$, contradiction.

Soit $x \in X_{\mathcal{F}}$ et supposons que $x \notin X$. Alors $x \in A^G \setminus X$, donc par construction $x|_{K_x} \in \mathcal{F}$ et $[x|_{K_x}] \subset A^G \setminus X$. En particulier, le motif $x|_{K_x}$ apparaît dans x ce qui contredit $x \in X_{\mathcal{F}}$. Donc $x \in X$. On a bien $X_{\mathcal{F}} \subset X$. Il vient que $X = X_{\mathcal{F}}$.

Soit $\mathcal{F}$ une famille de motifs. $X_{\mathcal{F}}$ est évidement stable par translation et de plus, pour un motif $w \in A^K$, l'ensemble des configurations qui contiennent w est $U_w = \bigcup_{g \in G} \sigma^{g^{-1}}([w])$, Or $[w]$ est ouvert, et comme $\sigma^{g^{-1}}$ est un homéomorphisme on a $\sigma^{g^{-1}}([w])$ est ouvert. Donc U_w est ouvert comme union d'ouverts. $X_{\mathcal{F}}$ est donc une intersection de fermés donc fermé.

□

Théorème 4.9. *Soit $X \subset A^G$ un sous-shift. Il existe une famille minimale de motifs interdits $\mathcal{O}$ telle que $X_{\mathcal{O}} = X$, dans le sens : si $\mathcal{F} \subset \mathcal{O}$ et $X_{\mathcal{F}} = X$, alors $\mathcal{F} = \mathcal{O}$.*

Plus précisément, on peut prendre

$$\mathcal{O} := \{ w \mid w \notin \mathcal{L}(X) \text{ et } \forall w'(w' \sqsubset w \wedge w' \neq w) \Rightarrow w' \in \mathcal{L}(X)\},$$

Démonstration. On a $X_{\mathcal{O}} = X$. Soit $x \in X$. Si un motif $w \in \mathcal{O}$ apparaissait dans x, on aurait $w \in \mathcal{L}(X)$ par définition du langage, ce qui contredit $w \notin \mathcal{L}(X)$. Donc $x \in X_{\mathcal{O}}$. Soit $x \in A^G \setminus X$. Comme X est fermé et les cylindres forment une base d'ouverts, il existe un sous-ensemble fini $K \subset G$ tel que $[x|_K] \subset A^G \setminus X$. Alors le motif $w := x|_K$ n'appartient pas à $\mathcal{L}(X)$. Choisissons maintenant K minimal pour l'inclusion parmi les ensembles finis vérifiant $[x|_K] \subset A^G \setminus X$. Par minimalité, pour tout sous-ensemble propre $K' \subsetneq K$, on a $[x|_{K'}] \not\subset A^G \setminus X$, donc il existe $y \in X$ tel que $y|_{K'} = x|_{K'}$. Ainsi $x|_{K'} \in \mathcal{L}(X)$. Autrement dit, tout sous-motif propre $w' = w|_{K'}$ appartient à $\mathcal{L}(X)$. On a donc $w \in \mathcal{O}$. On conclut que $X_{\mathcal{O}} = X$.

Soit $\mathcal{F} \subset \mathcal{O}$ tel que $X = X_{\mathcal{F}}$ et supposons qu'il existe $w \in \mathcal{O} \setminus \mathcal{F}$. Comme $w \notin \mathcal{L}(X)$, aucun point de X ne contient w, donc $[w] \cap X = \varnothing$. Comme $X = X_{\mathcal{F}}$, cela implique

$$[w] \subset A^G \setminus X_{\mathcal{F}} = \bigcup_{g \in G} \bigcup_{v \in \mathcal{F}} \sigma^g([v]).$$

Comme $[w]$ est fermé, on peut extraire un recouvrement fini $[w] \subset \bigcup_i \sigma^{g_i}([v_i])$. Posons $K = \bigcup supp(\sigma^{g_i}([v_i]))$. Pour tout i, $v_i \in \mathcal{O}$ donc $w \not\sqsubset v_i$ car $w \neq v_i$ et que tout les sous mot propre de v_i sont autorisé par définition de $\mathcal{O}$. On en deduit qu'il existe $K' \subset K$ non vide tel que $\bigcup_i \sigma^{g_i}(v_i)|_{K'} = A^{K'}$. Autrement, il existe un élément de $[w]$ qui n'appartiendrait pas à $A^G \setminus X_{\mathcal{F}}$. Donc il existe $\sigma^g(v)$ et $w' \sqsubset w$ tels que $w' \sqsubset \sigma^g(v)|_{K'}$. On a que w' est interdit car $\bigcup_i \sigma^{g_i}(v_i)|_{K'} = A^{K'}$. Donc $w' = w$ car w ne contient aucun sous-mot interdit et $w' = v_i$ pour la même raison donc $v_i = w$, c'est absurde.

□

4.3 Morphisme et fonction locale

Définition 4.10 (Facteur)**.** *Étant donné (X, F) et (Y, G) deux systèmes dynamiques et $f : X \to Y$ on dit que f est un homomorphisme si f est continue et que le diagramme suivant commute. Si f est de plus surjective on dit que f est une* ***factorisation*** *et que Y est un* ***facteur*** *de X.*

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{F} & X \\ {\scriptstyle f}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ Y & \xrightarrow[G]{} & Y \end{array}$$

Proposition 4.11. *Si $f : X \to Y$ est une factorisation bijective entre (X, F) et (Y, G) avec X compact et Y Hausdorff, alors sa réciproque f^{-1} est aussi une application de facteur. On dit que f est une* ***conjugaison*** *et que X et Y sont* ***conjuguées****.*

Démonstration. On a $f : X \to Y$ continue et bijective. Comme X est compact et Y est Hausdorff, on a que f est un homéomorphisme. En particulier, $f^{-1} : Y \to X$ est continue et surjective. Puisque f est une factorisation, on a le diagramme suivant qui commute.

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{F} & X \\ {\scriptstyle f}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ Y & \xrightarrow[G]{} & Y \end{array}$$

En composant à gauche par f^{-1}, on obtient $G = f^{-1} \circ F \circ f$. Puis en composant à droite

$G \circ f^{-1} = f^{-1} \circ F$. Autrement dit le diagramme commute,

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{F} & X \\ {\scriptstyle f^{-1}}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle f^{-1}} \\ Y & \xrightarrow[G]{} & Y \end{array}$$

□

Définition 4.12 (Fonction locale)**.** *Une fonction $f : A^G \to B^G$ est une **fonction locale** s'il existe $V \subset G$ fini et $f_V : A^V \to B$ tel que pour tout $g \in G$ et $x \in A^G$, $f(x)_g = f_V(x|_{\sigma^g(V)})$. On dit que V est la mémoire de f.*

Théorème 4.13 (Curtis Hedlund Lyndon)**.** *Une fonction $f : A^G \to B^G$ est locale si et seulement si c'est un homomorphisme de full shift.*

Démonstration. Si f est locale, de mémoire V

$$f(\sigma^h(x))_g = f(x)_{hg},$$

ou, de manière équivalente,

$$f(\sigma^h(x)) = \sigma^h(f(x)).$$

Donc f est G-équivariante. Étant donné K un sous ensemble fini de G et $\pi \in B^K$ un motif, on considère $[\pi]$ un cylindre de B^G. On a

$$f^{-1}([\pi]) \subset [\tau]$$

Où $\tau \subset A^{K'}$ avec $K' = \cup_{g \in K} gV$ et pour tout $g \in K$ $\pi_g = f_V(\sigma^g(\tau))$.

Réciproquement, supposons que $f : A^G \to B^G$ soit un homomorphisme. Comme A^G est compact (Proposition 4.3), f est uniformément continue. Donc il existe $V \subset G$ fini tel que pour tout $x, y \in A^G$ tel que $x|_V = y|_V$ on a $f(x)_\varepsilon = f(y)_\varepsilon$. On définit alors $f_V : A^V \to B$ par $f_V(x|_V) = f(x)_\varepsilon$ pour tout $x \in A^G$. Puisque f est G-équivariante, pour tout $x \in A^G$ et $g \in G$, on

$$f(x)_g = \sigma^g(f(x))_\varepsilon = f(\sigma^g(x))_\varepsilon = f_V(\sigma^g(x)|_V)$$

□

4.4 Automates Cellulaires

Définition 4.14 (Automate Cellulaires)**.** *Un **automate cellulaire** F sur l'alphabet A et le groupe G est une fonction locale $F : A^G \to A^G$ c'est à dire une fonction continue qui commute avec les translations.*

5 Rappels de calculabilité

La calculabilité étudie les problèmes de décision qui peuvent être résolus par une procédure effective, ainsi que les ensembles d'entiers qui peuvent être énumérés par un procédé algorithmique. Pour formaliser la notion intuitive de calcul effectif, on introduit les machines de Turing.

5.1 Définitions

Définition 5.1 (Machine de Turing)**.** *Une* ***machine de Turing*** *est la donnée d'un ensemble fini d'états Q, d'un état initial $q_0 \in Q$, d'un état d'arrêt $q_h \in Q$, et d'une fonction de transition*

$$\delta : Q \times \{0, 1, \sqcup\} \to \mathcal{P}(Q \times \{0, 1, \sqcup\} \times \{-1, 0, 1\}),$$

où $\sqcup$ désigne le symbole blanc.

Intuitivement, si la machine est dans l'état q et lit le symbole a, alors elle peut choisir un triplet $(q', b, d) \in \delta(q, a)$, écrire b, passer dans l'état q', puis déplacer la tête de lecture de $d \in \{-1, 0, 1\}$ cases.

On suppose que l'état q_h est absorbant, c'est-à-dire que pour tout $a \in \{0, 1, \sqcup\}$,

$$\delta(q_h, a) = \{(q_h, a, 0)\}.$$

Définition 5.2 (Acceptation)**.** *Soit M une machine de Turing. À toute entrée $w \in \{0, 1\}^*$, on associe la configuration initiale dans laquelle le ruban contient w, entouré de blancs, la tête est placée sur la première case de w (ou sur une case conventionnelle si $w = \varepsilon$), et la machine est dans son état initial.*

On dit que M ***accepte*** *w s'il existe une exécution finie partant de cette configuration initiale et atteignant l'état d'arrêt q_h.*

Remarque 4. *Comme $\{0, 1\}^*$ est dénombrable, on identifiera librement les mots binaires finis à des entiers naturels via un codage effectif. De même, les tuples finis d'entiers pourront être codés par des entiers ; on parlera donc indifféremment de problèmes de décision sur $\mathbb{N}$, sur $\mathbb{N}^k$, ou sur $\{0, 1\}^*$.*

Définition 5.3 (Ensemble semi-décidé par une machine)**.** *À toute machine de Turing M, on associe l'ensemble*

$$W(M) = \{\, n \in \mathbb{N} \mid M \text{ s'arrête sur l'entrée } n \,\}.$$

Après avoir fixé un codage effectif des machines de Turing par les entiers naturels, on note M_e la machine d'indice e, et

$$W_e := W(M_e) = \{\, n \in \mathbb{N} \mid M_e(n) \downarrow \,\}.$$

Autrement dit, W_e est l'ensemble des entiers sur lesquels la machine M_e s'arrête.

Proposition 5.4. *L'ensemble des machines de Turing est dénombrable. On fixe donc une énumération $(M_e)_{e \in \mathbb{N}}$ de toutes les machines de Turing.*

Définition 5.5 (Problème de décision)**.** *Un* ***problème de décision*** *est une partie $D \subseteq \mathbb{N}$ (ou, de manière équivalente, une partie de $\{0, 1\}^*$ via un codage effectif).*

On dit que D est :

- ***semi-décidable*** *s'il existe $e \in \mathbb{N}$ tel que $D = W_e$;*
- ***décidable*** *si D et son complémentaire sont tous deux semi-décidables.*

Théorème 5.6 (Thèse de Church Turing)**.** *Toute procédure effective est calculable par une machine de Turing.*

Remarque 5. *La thèse de Church Turing n'est pas, à proprement parler, un théorème mathématique : il s'agit d'un principe de nature qui nous permettra de donné plus librement la description de programme.*

Théorème 5.7 (Problème de l'arrêt)**.** *L'ensemble*

$$K = \{(e, n) \in \mathbb{N}^2 \mid n \in W_e\}$$

n'est pas décidable.

5.2 Machines à oracle et hiérarchie analytique

Pour étudier des problèmes plus complexes, il est utile d'autoriser les machines de Turing à interroger un oracle. Dans ce travail, les oracles seront des éléments de l'espace de Cantor $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$, c'est-à-dire des suites infinies d'entiers de bits.

Définition 5.8 (Machine à oracle)**.** *Soit $X \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$. Une **machine de Turing à oracle** X est une machine de Turing munie d'un mécanisme supplémentaire lui permettant de consulter l'oracle X. On peut, par exemple, supposer que la machine dispose d'un ruban spécial sur lequel elle écrit un entier n, puis reçoit en une étape la valeur $X(n)$.*

Si M_e est une machine à oracle d'indice e, on note

$$W_e^{\mathcal{O}} = \{\, X \in \{0,1\}^{\mathbb{N}} \mid M_e^X(\varepsilon) \downarrow\}$$

c'est-à-dire l'ensemble des oracles pour lesquels la machine M_e s'arrête sur entrée vide.

5.3 Hiérarchies arithmétique et analytique

Dans le domaine des automates cellulaires, presque toutes les propriétés naturelles sont indécidables, notamment parce que les automates cellulaires peuvent simuler des machines de Turing. La théorie descriptive effective des ensembles permet d'affiner cette observation en mesurant le degré d'indécidabilité d'un problème.

Définition 5.9 (Hiérarchie arithmétique)**.** *Les classes Σ_n^0 et Π_n^0 sont définies par récurrence comme suit :*

- *$\Sigma_0^0 = \Pi_0^0$ est la classe des ensembles calculables ;*
- *pour tout $n \geq 0$, $\mathcal{C} \in \Pi_n^0$ si et seulement si $\mathcal{C}^c \in \Sigma_n^0$;*
- *pour tout $n \geq 0$, $\mathcal{C} \in \Sigma_{n+1}^0$ si et seulement s'il existe $\mathcal{D} \in \Pi_n^0$ tel que*

$$\mathcal{C} = \{x \in \mathbb{N}^k \mid \exists y \in \mathbb{N}^m, (x, y) \in \mathcal{D}\,\}.$$

Remarque 6. *La hiérarchie arithmétique peut être vue comme l'analogue, en calculabilité, des hiérarchies de complexité définies par alternance de quantificateurs.*

Définition 5.10 (Hiérarchie analytique)**.** *Les classes Σ_n^1 et Π_n^1 sont définies de manière analogue, mais en autorisant des quantifications sur l'espace de Baire $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$:*

- *$\Sigma_0^1 = \Pi_0^1$ est la classe des ensembles arithmétiques ;*
- *pour tout $n \geq 0$, $\mathcal{C} \in \Pi_n^1$ si et seulement si $\mathcal{C}^c \in \Sigma_n^1$;*
- *pour tout $n \geq 0$, $\mathcal{C} \in \Sigma_{n+1}^1$ si et seulement s'il existe $\mathcal{D} \in \Pi_n^1$ tel que*

$$\mathcal{C} = \{X \in (\{0,1\}^{\mathbb{N}})^k \mid \exists Y \in (\{0,1\}^{\mathbb{N}})^m, (X, Y) \in \mathcal{D}\,\},$$

Définition 5.11 (Réduction et complétude)**.** *Soit $\mathcal{C}$ une classe de complexité descriptive. Un ensemble A est dit **difficile** pour $\mathcal{C}$ si pour tout $B \in \mathcal{C}$, il existe une réduction calculable de B vers A. Il est dit **complet** pour $\mathcal{C}$ s'il appartient à $\mathcal{C}$ et est difficile pour $\mathcal{C}$.*

5.4 Problèmes canoniques utiles

Nous aurons besoin de plusieurs ensembles classiques de la théorie de la calculabilité.

Définition 5.12. *On définit les ensembles suivants :*

$$\mathrm{TOT} = \{e \in \mathbb{N} \mid W_e = \mathbb{N}\} \tag{1}$$

c'est-à-dire l'ensemble des indices de machines qui s'arrêtent sur toute entrée.

On définit également

$$\mathrm{COF} = \{e \in \mathbb{N} \mid W_e \text{ est cofini}\} \tag{2}$$

où un ensemble $A \subseteq \mathbb{N}$ est dit cofini si son complémentaire $\mathbb{N} \setminus A$ est fini.

Enfin, on pose

$$\mathrm{RTOT} = \{e \in \mathbb{N} \mid \forall X \in \{0,1\}^{\mathbb{N}},\ M_e^{\mathcal{O}} \downarrow\} \tag{3}$$

Autrement dit, RTOT *est l'ensemble des indices de machines à oracle qui s'arrêtent sur entrée vide pour tout oracle $X \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$.*

Théorème 5.13. *Les ensembles* TOT, COF *et* RTOT *vérifient :*

1. TOT *est Π_2^0-complet ;*
2. COF *est Σ_3^0-complet ;*
3. RTOT *est Π_1^1-complet.*

Démonstration. Les points (1) et (2) sont classiques.

- La Π_2^0-complétude de TOT est standard en théorie de la calculabilité.
- La Σ_3^0-complétude de COF l'est également.

Montrons le point (3). Tout d'abord, RTOT appartient à Π_1^1, puisque

$$e \in \mathrm{RTOT} \iff \forall X \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}, M_e^X(\varepsilon) \downarrow,$$

et la relation $M_e^X(\varepsilon) \downarrow$ est arithmétique.

Réciproquement, soit $S \subseteq (\mathbb{N}^{\mathbb{N}})^n \times \mathbb{N}^m$ un ensemble Π_1^1. D'après la forme normale des ensembles Π_1^1 (voir par exemple [Rog87, Chapter 16, Corollary III]), il existe une relation récursive R telle que

$$(X, x) \in S \iff \forall Y \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}, \exists y \in \mathbb{N}, R(Y, X, y, x).$$

Fixons (X, x). On construit effectivement un indice $e(X, x)$ d'une machine à oracle telle que, pour tout oracle Y, la machine $M_{e(X,x)}^Y$, sur entrée vide, énumère successivement les entiers $y \in \mathbb{N}$ et teste si $R(Y, X, y, x)$ est vraie. Comme R est récursive, ce test est effectif. La machine s'arrête dès qu'un tel y est trouvé.

Ainsi,

$$M_{e(X,x)}^Y(\varepsilon) \downarrow \iff \exists y \in \mathbb{N}, R(Y, X, y, x).$$

Par conséquent,

$$e(X, x) \in \mathrm{RTOT} \iff \forall Y \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}, \exists y \in \mathbb{N}, R(Y, X, y, x) \iff (X, x) \in S.$$

On a donc construit une réduction calculable de S à RTOT, ce qui montre que RTOT est Π_1^1-difficile. Comme RTOT $\in \Pi_1^1$, il est Π_1^1-complet. □

6 Sensibilité et stabilité

6.1 Définitions

Soit $F : X \to X$ un automate cellulaire.

Définition 6.1 (Équicontinuité)**.** *On dit que $x \in X$ est un point* ***d'équicontinuité*** *si*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n,\ \forall i \geq 0, \quad \operatorname{diam}\big(F^i(B_n(x))\big) < \varepsilon. \tag{4}$$

On note $\mathcal{E}$ l'ensemble des points d'équicontinuité.

Cela signifie que, si l'on part suffisamment près de x, alors toutes les orbites restent uniformément proches de l'orbite de x. Autrement dit, x est un point dont la dynamique est stable à toutes les échelles.

Définition 6.2 (Équicontinuité en diamètre moyen)**.** *On dit que $x \in X$ est un point* ***d'équicontinuité en diamètre moyen*** *si*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n, \quad \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^{n} \operatorname{diam}\big(F^i(B_n(x))\big) < \varepsilon. \tag{5}$$

On note $\mathcal{DME}$ l'ensemble de ces points.

Ici, on ne demande plus que le voisinage reste petit à chaque instant, mais seulement en moyenne le long du temps. Des épisodes d'instabilité sont donc autorisés, à condition qu'ils soient suffisamment rares pour que le diamètre moyen reste petit.

Définition 6.3 (Équicontinuité en moyenne)**.** *On dit que $x \in X$ est un point* ***d'équicontinuité en moyenne*** *si*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n,\ \forall y \in B_n(x), \quad \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^{n} d\big(F^i(x), F^i(y)\big) < \varepsilon. \tag{6}$$

On note $\mathcal{ME}$ l'ensemble de ces points.

Cette fois, on compare directement l'orbite de x à celle de chaque point voisin y. On autorise encore des écarts ponctuels, mais on demande qu'en moyenne les deux orbites restent proches. Le diamètre moyen peut donc diverger mais point à point les écarts sont rares.

Proposition 6.4. *On a*

$$\mathcal{E} \subset \mathcal{DME} \subset \mathcal{ME}.$$

Démonstration. Montrons d'abord que $\mathcal{E} \subset \mathcal{DME}$. Soit $x \in \mathcal{E}$, et soit $\varepsilon > 0$. Par équicontinuité, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $i \geq 0$,

$$\operatorname{diam}\big(F^i(B_\delta(x))\big) < \varepsilon.$$

En particulier, pour tout $n \geq 0$,

$$\frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^{n} \operatorname{diam}\big(F^i(B_\delta(x))\big) < \varepsilon,$$

d'où $x \in \mathcal{DME}$.

Montrons maintenant que $\mathcal{DME} \subset \mathcal{ME}$. Soit $x \in \mathcal{DME}$, et soit $\varepsilon > 0$. Il existe $\delta > 0$ tel que

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^{n} \operatorname{diam}\big(F^i(B_\delta(x))\big) < \varepsilon.$$

Pour tout $y \in B_\delta(x)$ et tout $i \geq 0$, on a

$$d\big(F^i(x), F^i(y)\big) \leq \operatorname{diam}\big(F^i(B_\delta(x))\big),$$

puisque $F^i(x)$ et $F^i(y)$ appartiennent tous deux à $F^i(B_\delta(x))$. En moyennant puis en prenant la limite supérieure, on obtient

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^{n} d\big(F^i(x), F^i(y)\big) < \varepsilon.$$

Ainsi $x \in \mathcal{ME}$. □

Définition 6.5 (Ensemble résiduel)**.** *Un ensemble $R \subset X$ est dit **résiduel** s'il contient une intersection dénombrable d'ouverts denses de X. De manière équivalente, son complémentaire est maigre.*

Remarque 7. *Dans un espace de Baire, en particulier dans tout compact métrique, les ensembles résiduels sont des ensembles topologiquement grands. Ils jouent en dynamique topologique un rôle analogue à celui des ensembles de mesure 1 en théorie ergodique : ce sont les ensembles qui décrivent le comportement générique du système.*

Définition 6.6 (Presque équicontinuité)**.** *On dit que F est **presque équicontinu** (resp. presque équicontinu en diamètre moyen, resp. presque équicontinu en moyenne) si $\mathcal{E}$ (resp. $\mathcal{DME}$, resp. $\mathcal{ME}$) est résiduel.*

Définition 6.7 (Sensibilité)**.** *On dit que F est **sensible** aux conditions initiales si*

$$\exists \varepsilon > 0,\ \forall x \in X,\ \forall \delta > 0,\ \exists i \geq 0, \quad \operatorname{diam}\big(F^i(B_\delta(x))\big) > \varepsilon. \tag{7}$$

La sensibilité exprime le phénomène opposé à l'équicontinuité : quelle que soit la précision avec laquelle on choisit l'état initial, il existe toujours deux configurations arbitrairement proches au départ qui finissent par se séparer d'au moins ε. C'est une sorte de notion duale de la notion de point d'équicontinuité bien qu'un point d'équicontinuité soit ponctuel tandis que la sensibilité aux conditions initiales est une notion globale du système.

Définition 6.8 (Sensibilité en diamètre moyen)**.** *On dit que F est **sensible en diamètre moyen** si*

$$\exists \varepsilon > 0,\ \forall x \in X,\ \forall \delta > 0, \quad \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^{n} \operatorname{diam}\big(F^i(B_\delta(x))\big) > \varepsilon. \tag{8}$$

Cette notion demande plus qu'une séparation ponctuelle : elle impose qu'en moyenne, les images de tout petit voisinage gardent un diamètre uniformément grand. On ne regarde donc plus une divergence à un instant donné, mais une instabilité qui persiste le long du temps.

Définition 6.9 (Sensibilité en moyenne)**.** *On dit que F est **sensible en moyenne** si*

$$\exists \varepsilon > 0,\ \forall x \in X,\ \forall \delta > 0,\ \exists y \in B_\delta(x), \quad \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^{n} d\big(F^i(x), F^i(y)\big) > \varepsilon. \tag{9}$$

Ici, on demande que près de tout point x, on puisse trouver un voisin y dont l'orbite s'écarte de celle de x de manière significative en moyenne. C'est donc une version encore plus exigeante que la sensibilité en diamètre moyen, puisqu'on impose une séparation moyenne le long d'une paire d'orbites.

Proposition 6.10. *On a*

$$\textit{sensible en moyenne} \implies \textit{sensible en diamètre moyen} \implies \textit{sensible.}$$

De plus :

$$\begin{aligned} \mathcal{E} \neq \varnothing &\implies F \textit{ n'est pas sensible,} \\ \mathcal{DME} \neq \varnothing &\implies F \textit{ n'est pas sensible en diamètre moyen,} \\ \mathcal{ME} \neq \varnothing &\implies F \textit{ n'est pas sensible en moyenne.} \end{aligned}$$

Démonstration. Montrons d'abord que la sensibilité en moyenne implique la sensibilité en diamètre moyen. Soit $\varepsilon > 0$ une constante de sensibilité en moyenne. Pour tout $x \in X$ et tout $\delta > 0$, il existe $y \in B_\delta(x)$ tel que

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^{n} d\big(F^i(x), F^i(y)\big) > \varepsilon.$$

Or pour tout i,

$$d\big(F^i(x), F^i(y)\big) \leq \operatorname{diam}\big(F^i(B_\delta(x))\big).$$

En prenant les moyennes puis la limite supérieure, on obtient bien la sensibilité en diamètre moyen.

Montrons ensuite que la sensibilité en diamètre moyen implique la sensibilité. Soit $\varepsilon > 0$ une constante de sensibilité en diamètre moyen. Pour tout $x \in X$ et tout $\delta > 0$,

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^{n} \operatorname{diam}\big(F^i(B_\delta(x))\big) > \varepsilon.$$

En particulier, il existe au moins un entier $i \geq 0$ tel que

$$\operatorname{diam}\big(F^i(B_\delta(x))\big) > \varepsilon,$$

sans quoi tous les termes de la suite seraient inférieurs à ε, et la moyenne supérieure le serait aussi. On obtient donc la sensibilité.

Pour les assertions de non-sensibilité, il suffit de raisonner par contradiction. Par exemple, si $x \in \mathcal{E}$ et si F était sensible de constante $\varepsilon > 0$, alors en appliquant l'équicontinuité au seuil ε, on trouverait $\delta > 0$ tel que pour tout $i \geq 0$,

$$\operatorname{diam}\big(F^i(B_\delta(x))\big) < \varepsilon,$$

ce qui contredit la sensibilité en x. Les deux autres cas se traitent exactement de la même manière. □

6.2 Contre-exemples

Des exemples sont déjà donnés par García-Ramos et de los Santos Baños [dlSBGR20, dlSBGR21], mais nous en proposons de nouveaux afin de mieux comprendre les phénomènes à l'oeuvre. Le but n'est pas seulement de séparer formellement les notions, mais aussi de montrer quel type de mécanisme dynamique produit ces écarts.

6.2.1 Téléphérique vas-et-viens

L'automate cellulaire suivant est presque équicontinu en diamètre moyen, mais sans point d'équicontinuité.

L'idée est de créer des obstacles qui laissent passer l'information toutes les n itérations, où n dépend de l'obstacle considéré. L'information circule donc bien, mais de manière très intermittente. Cette intermittence suffit à détruire l'équicontinuité au sens usuel, tout en conservant une forme de stabilité en moyenne sur le diamètre.

On considère l'automate cellulaire suivant. Posons

$$A = \{\sqcup, \rightarrow\} \times W,$$

où W est donné par :



On note $\mathcal{L}(W)$ le langage du sous-shift associé.

On donne les règles du téléphérique : pour $x \in A^{\mathbb{Z}}$ et $i \in \mathbb{Z}$,

$$F(x)_i = \begin{cases} (\rightarrow, _) & \text{si } x_{i-1} = (\rightarrow, _) \text{ et } \big(x_{i-1} \neq (_, \square\!\!\rangle) \text{ ou } x_i \neq (_, \square\!\!\rangle)\big) \\ (\sqcup, _) & \text{sinon} \\ (_, \square) & \text{si } x_i = \square \text{ ou } x_{i-1}x_ix_{i+1} \notin \mathcal{L}(W) \\ (_, t \in \{\square\!\!\rangle, \langle\!\!\square\}) & \text{si } x_i = t \text{ et } x_{i-1}x_ix_{i+1} \in \mathcal{L}(W) \\ (_, \boxed{\mathrm{R}}) & \text{si } \big(x_{i-1} = \boxed{\mathrm{R}} \text{ et } x_{i+1} = \langle\!\!\square\big) \text{ ou } \big(x_{i-1} = \square\!\!\rangle \text{ et } x_{i+1} = \boxed{\mathrm{L}}\big) \\ (_, \boxed{\mathrm{L}}) & \text{si } \big(x_{i+1} = \boxed{\mathrm{L}} \text{ et } x_{i-1} = \square\!\!\rangle\big) \text{ ou } \big(x_{i+1} = \square\!\!\rangle \text{ et } x_{i-1} = \boxed{\mathrm{R}}\big) \\ (_, \boxed{\mathrm{R}}\!\rangle) & \text{si } x_i = \boxed{\mathrm{R}} \text{ et } x_{i-1}x_ix_{i+1} \in \mathcal{L}(W) \\ (_, \langle\!\boxed{\mathrm{L}}) & \text{si } x_i = \boxed{\mathrm{L}} \text{ et } x_{i-1}x_ix_{i+1} \in \mathcal{L}(W) \end{cases}$$

Nous ne donnons pas la preuve ici dans ce mémoire un autre contre exemple est donné dans [dlSBGR20].

6.2.2 Téléphérique avec attente

L'automate cellulaire suivant est presque équicontinu en moyenne, mais pas presque équicontinu en diamètre moyen.

Cette fois, l'idée est que l'obstacle laisse passer de l'information à n'importe quel moment puis attend n itérations avant de laisser à nouveau passer une perturbation. Ainsi les perturbations sont rares par paire d'orbites mais dans une boule on trouve toujours une paire deux éléments éloignés à l'étape n.

Considérons $G : A^{\mathbb{Z}} \to A^{\mathbb{Z}}$, dont les règles sont données ci-après.

$$G(x)_i = \begin{cases} (\rightarrow, _) & \text{si } x_{i-1} = (\rightarrow, _) \text{ et } \big(x_{i-1} \neq (_, \boxed{\rightarrow}) \text{ ou } x_i \neq (_, \boxed{\rightarrow})\big) \\ (\sqcup, _) & \text{sinon} \\ (_, \boxed{}) & \text{si } x_i = \boxed{} \text{ ou } x_{i-1}x_ix_{i+1} \notin \mathcal{L}(W) \\ (_, t \in \{\boxed{\rightarrow}, \boxed{\leftarrow}\}) & \text{si } x_i = t \text{ et } x_{i-1}x_ix_{i+1} \in \mathcal{L}(W) \\ (_, \boxed{\mathfrak{L}}) & \text{si } \big(x_{i+1} = \boxed{\mathfrak{L}} \text{ et } x_{i-1} = \boxed{\rightarrow}\big) \text{ ou } \big(x_{i+1} = \boxed{\rightarrow} \text{ et } x_{i-1} = \boxed{\mathfrak{R}}\big) \\ & \quad \text{ou } \big(x_{i-1} = (\sqcup, \boxed{\rightarrow}) \text{ et } x_i = \boxed{\mathfrak{L}}\big) \text{ ou } \big(x_{i-1} = (\sqcup, \boxed{\rightarrow}) \text{ et } x_{i+1} = \boxed{\mathfrak{L}}\big) \\ (_, \boxed{\mathfrak{L}}) & \text{si } \big(x_{i+1} = \boxed{\mathfrak{L}} \text{ et } x_{i-1} = \boxed{\rightarrow}\big) \text{ ou } \big(x_{i+1} = \boxed{\rightarrow} \text{ et } x_{i-1} = \boxed{\mathfrak{R}}\big) \\ & \quad \text{ou } \big(x_{i-1} = (\sqcup, \boxed{\rightarrow}) \text{ et } x_i = \boxed{\mathfrak{L}}\big) \text{ ou } \big(x_{i-1} = (\sqcup, \boxed{\rightarrow}) \text{ et } x_{i+1} = \boxed{\mathfrak{L}}\big) \\ (_, \boxed{\rightarrow}) & \text{si } x_i = \boxed{\mathfrak{R}} \text{ et } x_{i-1}x_ix_{i+1} \in \mathcal{L}(W) \\ (_, \boxed{\leftarrow}) & \text{si } x_i = \boxed{\mathfrak{L}} \text{ et } x_{i-1}x_ix_{i+1} \in \mathcal{L}(W) \end{cases}$$

Ainsi, G est presque équicontinu en moyenne, mais pas presque équicontinu en diamètre moyen. Nous ne donnons pas la preuve ici dans ce mémoire un autre contre exemple est donné dans [dlSBGR21].

6.3 Traces

Définition 6.11 (Trace)**.** *Soit $F : A^{\mathbb{Z}} \to A^{\mathbb{Z}}$ un automate cellulaire et soit $c \in \mathbb{N}$. La **trace** de largeur c d'une configuration $x \in A^{\mathbb{Z}}$ est la suite*

$$tr^c(x) = \big(F^j(x)_{[-c,c]}\big)_{j\in\mathbb{N}} \in \big(A^{[-c,c]}\big)^{\mathbb{N}}.$$

*On appelle **trace de largeur** c de F le sous-shift*

$$\tau^c(F) = tr^c\big(A^{\mathbb{Z}}\big) \subset \big(A^{[-c,c]}\big)^{\mathbb{N}},$$

6.4 Liens avec les traces

Théorème 6.12. *Un automate cellulaire est équicontinu en diamètre moyen si et seulement si toutes ses traces le sont.*

Démonstration. La preuve est donnée par les deux proposition suivantes. □

Proposition 6.13. *Soient (X, d_X) et (Y, d_Y) deux compacts métriques, $F : X \to X$, $G : Y \to Y$ continues, et $f : X \to Y$ continue, surjective et ouverte telle que $f \circ F = G \circ f$. Si (X, F) est équicontinu en diamètre moyen, alors (Y, G) l'est aussi.*

Démonstration. Comme X est compact et f est continue, f est uniformément continue.

Fixons $y \in Y$ et $\varepsilon > 0$. Choisissons $x \in X$ tel que $f(x) = y$. Par uniforme continuité, il existe $\eta > 0$ tel que

$$d_X(u, v) < \eta \implies d_Y\big(f(u), f(v)\big) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

En particulier, pour tout ensemble $A \subset X$,

$$\operatorname{diam}(A) < \eta \implies \operatorname{diam}\big(f(A)\big) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Par hypothèse, il existe $\delta_X > 0$ tel que

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^{n} \operatorname{diam}\big(F^i(B_{\delta_X}(x))\big) < \frac{\eta\varepsilon}{2\operatorname{diam}(Y)}.$$

Comme f est ouverte, $f(B_{\delta_X}(x))$ est un voisinage ouvert de y. Il existe donc $\rho > 0$ tel que

$$B_\rho(y) \subset f(B_{\delta_X}(x)).$$

Posons, pour $i \geq 0$,

$$A_i := F^i(B_{\delta_X}(x)), \qquad a_i := \operatorname{diam}(A_i), \qquad b_i := \operatorname{diam}\big(G^i(B_\rho(y))\big).$$

Comme f commute avec les dynamiques,

$$G^i(B_\rho(y)) \subset G^i\big(f(B_{\delta_X}(x))\big) = f\big(F^i(B_{\delta_X}(x))\big) = f(A_i),$$

donc

$$b_i \leq \operatorname{diam}\big(f(A_i)\big).$$

Si $a_i < \eta$, alors $\operatorname{diam}(f(A_i)) < \varepsilon/2$, donc $b_i < \varepsilon/2$. Si $a_i \geq \eta$, on a trivialement $b_i \leq \operatorname{diam}(Y)$. Ainsi, pour tout n,

$$\sum_{i=0}^{n} b_i \leq \frac{\varepsilon(n+1)}{2} + \operatorname{diam}(Y)\,\#\{0 \leq i \leq n : a_i \geq \eta\}.$$

D'autre part,

$$\eta\,\#\{0 \leq i \leq n : a_i \geq \eta\} \leq \sum_{i=0}^{n} a_i.$$

Par conséquent,

$$\frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{n} b_i \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\operatorname{diam}(Y)}{\eta(n+1)}\sum_{i=0}^{n} a_i.$$

En prenant la limite supérieure, on obtient

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{n} b_i \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\operatorname{diam}(Y)}{\eta}\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{n} a_i < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\operatorname{diam}(Y)}{\eta}\cdot\frac{\eta\varepsilon}{2\operatorname{diam}(Y)} = \varepsilon.$$

Ainsi, (Y, G) est équicontinu en diamètre moyen en y. Comme y est arbitraire, (Y, G) est équicontinu en diamètre moyen. □

Proposition 6.14. *Un automate cellulaire est équicontinu en diamètre moyen si toutes ses traces le sont.*

Démonstration. Notons r le rayon de F. Fixons $x \in A^{\mathbb{Z}}$ et $\varepsilon > 0$.

Choisissons $c \in \mathbb{N}$ tel que

$$2^{-c} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Par hypothèse, la trace $\tau^c(F)$ est équicontinue en diamètre moyen. En particulier, au point $tr^c(x)$, il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{n} \operatorname{diam}\Big(\sigma^i\big(B_{[0,m]}(tr^c(x))\big)\Big) < \frac{\varepsilon}{2},$$

où $B_{[0,m]}(tr^c(x))$ désigne le cylindre des traces qui coïncident avec $tr^c(x)$ aux temps $0, \ldots, m$.

Par propagation finie de l'information, toute configuration qui coïncide avec x sur l'intervalle $[-c-rm, c+rm]$ a la même trace que x sur la fenêtre $[-c, c]$ pendant les temps $0, \dots, m$. Autrement dit,

$$B_{[-c-rm,c+rm]}(x) \subset (tr^c)^{-1}\big(B_{[0,m]}(tr^c(x))\big).$$

Ainsi, pour tout $i \geq 0$, deux points de $F^i\big(B_{[-c-rm,c+rm]}(x)\big)$ ont la même projection sur $[-c, c]$ dès que leurs traces sont identiques au temps i, et l'éventuelle différence en dehors de cette fenêtre est contrôlée par 2^{-c}. On en déduit

$$\operatorname{diam}\Big(F^i\big(B_{[-c-rm,c+rm]}(x)\big)\Big) \leq 2^{-c} + \operatorname{diam}\Big(\sigma^i\big(B_{[0,m]}(tr^c(x))\big)\Big).$$

En sommant de 0 à n, on obtient

$$\sum_{i=0}^{n} \operatorname{diam}\Big(F^i\big(B_{[-c-rm,c+rm]}(x)\big)\Big) \leq (n+1)2^{-c} + \sum_{i=0}^{n} \operatorname{diam}\Big(\sigma^i\big(B_{[0,m]}(tr^c(x))\big)\Big).$$

En divisant par $n+1$ puis en prenant la limite supérieure, il vient

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^{n} \operatorname{diam}\Big(F^i\big(B_{[-c-rm,c+rm]}(x)\big)\Big) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Ainsi F est équicontinu en diamètre moyen en x. Comme x est arbitraire, F est équicontinu en diamètre moyen. □

7 Résultats principaux

Cette section a pour but de montrer que la hiérarchie de Kůrka explose sur le groupe libre et de donner la complexité calculatoire précise des propriétés de stabilité (équicontinuité) et de sensibilité.

7.1 Sensibilité

Définition 7.1 (Mot bloquant)**.** *Étant donné G un groupe et $F : A^{\mathbb{G}} \to A^G$ un automate cellulaire, un **mot bloquant** pour la taille n est un motif $\pi \in A^K$ avec K un sous-ensemble fini de G tel qu'il existe $g \in K$ pour lequel $B_n(g) \subset K$ et tel que pour tous $x, y \in [\pi]$ et tout N, on a*

$$F^N(x)|_{B_n(g)} = F^N(y)|_{B_n(g)}.$$

Proposition 7.2. *Un automate cellulaire n'est **pas sensible** aux conditions initiales si et seulement s'il admet des mots bloquants arbitrairement grands.*

Démonstration. Si F est sensible aux conditions initiales, alors il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour toute configuration x et tout $\delta > 0$, il existe $y \in B_\delta(x)$ et n tel que $d(F^n(x), F^n(y)) > \varepsilon$. Cela signifie qu'il existe $m > -\log_2(\varepsilon)$ tel que des configurations arbitrairement proches finiront par différer sur $B_m(\varepsilon)$. Il n'y a donc pas de mot bloquant de taille m.

À l'inverse, si F n'est pas sensible aux conditions initiales, alors pour tout $\varepsilon > 0$, et donc pour tout $m > -\log_2(\varepsilon)$, on peut trouver un motif π tel que toutes les configurations dans $[\pi]$ ne différeront jamais sur $B_m(\varepsilon)$. Par conséquent, on peut construire des mots bloquants arbitrairement grands. □

Proposition 7.3. *La sensibilité aux conditions initiales est un problème Σ_3^0.*

Démonstration. D'après la proposition précédente, la non-sensibilité équivaut à l'existence de mots bloquants arbitrairement grands. En quantifiant uniquement sur les motifs finis, on peut écrire cette propriété sous la forme suivante :

$$\forall N \in \mathbb{N},\ \exists m > N,\ \exists m' \in \mathbb{N},\ \exists p \in \mathbb{N},\ \exists w \in A^{B_{m'}},$$

$$\forall u, v \in \mathrm{Fin},\ \forall n \in \mathbb{N},\ \big(u \in [w] \wedge v \in [w]\big) \Rightarrow F^n(u)|_{\sigma^p(B_{\mathbb{F}_2}(m))} = F^n(v)|_{\sigma^p(B_{\mathbb{F}_2}(m))}.$$

La non-sensibilité est donc une propriété de classe Π^0_3, et par complémentarité la sensibilité est une propriété de classe Σ^0_3. □

Maintenant nous allons réduire le problème COF introduit en Section 5 au problème de la sensibilité, ce qui nous donnera la difficulté pour la classe Σ^0_3. En combinant ce résultat avec la sous-section précédente, on aura prouvé le théorème A.

La construction qui suit comporte plusieurs couches relativement indépendantes. Chaque couche est un automates cellulaires agissant sur sa propre à couche. La dépendance vient du symbole blanc qui se propage sur toutes les couches.

On introduit le jeu de tuiles de Wang W_1 Figure 2.

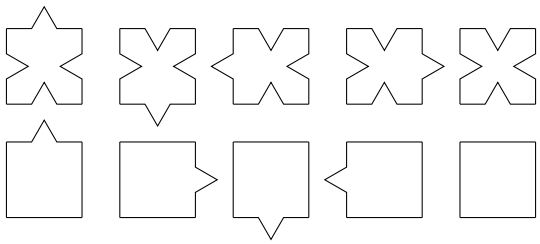


FIGURE 2 : Jeu de tuile W_1, chaque composante connexe de cellule non □ contient exactement un centre, c'est-à-dire une cellule ⊠.

On note X_1 le sous-shift associé dans lequel on impose de plus la règle que deux cellules non blanches ne peuvent pas être reliées par une case blanche (pour plus de précision, voir la règle 2 de F_1) et que deux cellules de forme ⬠, ▷, ▽ ou ◁ ne peuvent pas être voisines (voir règle 3 de F_1). Un extrait d'une configuration typique du sous-shift X_1 est donné figure 3.

Remarque 8. *Ce sous-shift possède une structure arborescente et construit des arbres partiels du graphe de Cayley. Pour toute famille d'ensembles finis (ou même infinis, bien que nous ne nous intéressions ici qu'aux motifs finis), il existe une configuration du sous-shift pour laquelle les cellules blanches sont exactement celles qui n'appartiennent à aucun de ces ensembles.*

Ainsi que l'automate cellulaire F_1 défini par

$$F_1(x)_i = \begin{cases} \square & \text{si } x_i \text{ est témoin d'une erreur dans son voisinage direct} & (1)\\ \square & \text{s'il existe } s_1, s_2 \in \{a, a^{-1}, b, b^{-1}\} \text{ tels que } x_{is_1} = \square \wedge x_{is_1s_2} \neq \square \wedge s_1 s_2 \neq \varepsilon & (2)\\ \square & \text{si } x_i \in \{⬠, ▷, ▽, ◁\} \text{ et s'il existe } s \in \{a, a^{-1}, b, b^{-1}\} \text{ tel que } x_{is} \in \{⬠, ▷, ▽, ◁\} & (3)\\ x_i & \text{sinon} & (4) \end{cases} \tag{10}$$

Proposition 7.4. *Étant donné $x \in {W_1}^{\mathbb{F}_2}$ une configuration qui ne contient qu'un nombre fini de cellules de valeurs différentes de blanc, il existe N tel que pour tout $n \geq N$, $F_1^n(x) \in X_1$.*

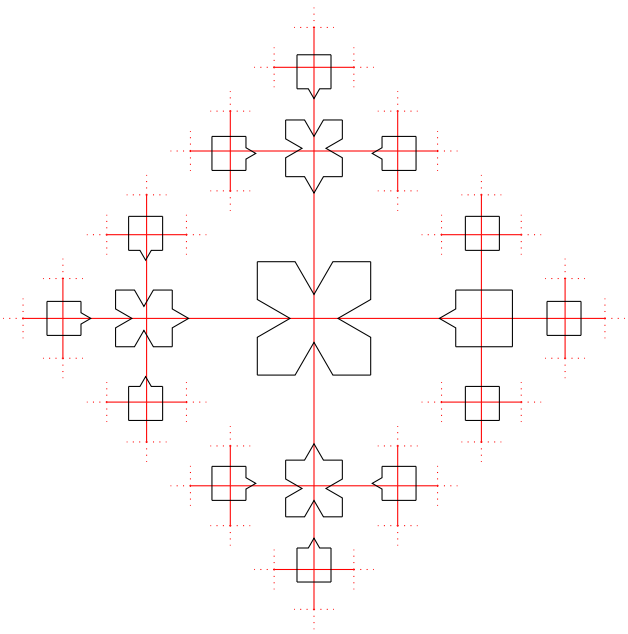
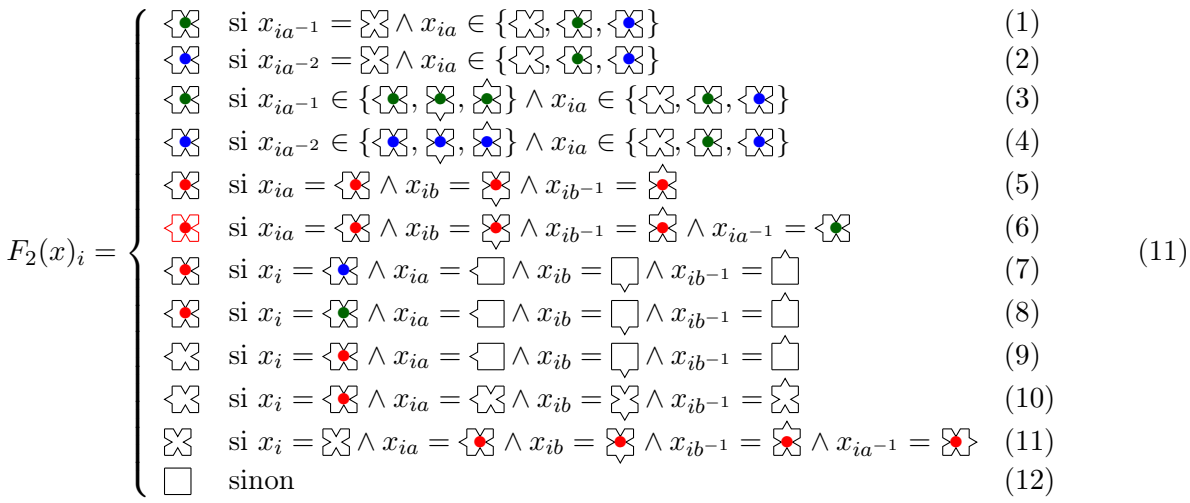


FIGURE 3 : Extrait d'une configuration typique de X_1.

Démonstration. Étant donné une configuration avec un nombre finie de cellules non $\square$ x, on a que pour tout n, $F_1^n(x)$ est finie. S'il y a c_n cellules non blanches dans $F_1^n(x)$, à chaque étape on efface les cellules invalides, ainsi $c_{n+1} \leq c_n$. Donc c_n est stationnaire à partir d'un certain rang, ce qui implique que toutes les cellules restantes sont valides. □

Remarque 9. *Ce sous-shift ressemble beaucoup à la couverture du sunny side up (sous-shift sur* $\{0,1\}$ *où les configurations ont au plus un* 1*) sur le groupe libre, auquel on aurait rajouté un symbole blanc. On peut alors se demander pourquoi rajouter ce symbole blanc. Notre automate* F_1 *part d'une configuration arbitraire et la stabilise en une configuration de* X_1*. Sans le symbole blanc, il ne pourrait y avoir qu'un seul centre, ce qui créerait des corrélations à longue distance interdisant les mots bloquants.*

On introduit maintenant l'automate cellulaire F_2 sur la couche $A = \{\bullet, \bullet, \bullet, \square\}$ et qui opère sur le sous-shift X_1. Ses règles sont données sur l'axe du générateur a mais sont symétriques dans toutes les directions :



Définition 7.5 (Cellule marquée)**.** *Les cellules ayant un contour rouge comme* *dans la règle* 6 *sont appelé* ***cellules marquées****.*

Remarque 10. *Cet automate cellulaire n'est pas à proprement parler un automate cellulaire sur* X_1 *puisqu'on s'autorise à modifier la structure de* X_1 *via la dernière règle ainsi qu'à marquer les tuiles via la règle 7. On considérera donc plutôt* $F_2' = F_2 \circ F_1$ *d'alphabet* $W_1 \times A$*, que l'on considérera avec ses projections* π_{W_1} *et* π_A*.*

Définition 7.6. *On note* X_2 *le sous-shift de* X_1 *engendré par les configurations où les composantes connexes finies de cellules non*  *forment des boules de centre* *pour la distance du mot.*

Proposition 7.7. *Pour toute configuration avec un nombre finie de cellules non* *,* $x \in (W_1 \times A)^{\mathbb{F}_2}$*, il existe* N *tel que pour tout* $n \geq N$*,* $\pi_{W_1}(F_2'^n(x)) \in X_2$ *et, de plus, pour tout* $y \in X_2$ *il existe un tel* x*. De plus, chaque boule de rayon* n *contient une sous-boule marquée* *de rayon* $\frac{3n}{4}$ *et de même centre.*

Démonstration. Étant donné x une configuration avec un nombre finie de cellules non . Par la Proposition 7.4, posons $x' = F_2'^N(x)$ tel que $x' \in X_1$. Considérons une composante connexe non blanche de x' et la branche de l'axe a allant de à , et notons n la longueur de la branche. On a soit déjà un point • sur la branche, soit il apparaîtra sur la branche en au plus n étapes, puisque les • et • se déplacent toujours vers l'extérieur par la règle 2 de F_2 et se transforment en • à la frontière, par les règles 7 et 8 de F_2. Considérons le • le plus éloigné du centre sur la branche. Il atteindra en au plus n étapes puisque les • se déplacent vers le centre par les règles 5 et 6 de F_2. De plus, il n'y aura plus aucune couleur sur la branche par les règles 9 et 10 de F_2. Et ceci, par symétrie, pour chaque branche. Ainsi, en un aller-retour supplémentaire, l'origine recevra tous les • en même temps si et seulement si la composante connexe est une boule. Tout ceci arrive à supposer qu'aucune erreur n'ait été détectée plus tôt dans le processus, auquel cas une erreur aurait été introduite par la règle 12 de F_2 et l'action de F_1 aurait supprimé la composante connexe en temps fini.

De plus, par la règle 6, lorsque des • rencontrent des •, les cellules sont marquées. Les • se déplacent à vitesse 2, donc atteignent le bord quand les • sont à position $\frac{n}{2}$ sur les branches. Les • se déplacent à vitesse 1, donc rencontrent les • à $\frac{3n}{4}$. □

Proposition 7.8. *Soit $x \in X_1$ une configuration avec un nombre finie de cellules non $\square$, et soit $i \in G$ tel que $x_i \in \{\square, \square, \square, \square\}$. Alors il existe une suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathbb{F}_2$ telle que $g_0 = i$, pour tout n on a $d(g_n, g_{n+1}) = 1$. Les g_n sont deux à deux distincts, et pour tout $n > 0$, $x_{g_n} = \square$.*

Démonstration. Soit x une configuration avec un nombre finie de cellules non $\square$, de X_1 et i tel que $x_i \in \{\square, \square, \square, \square\}$. L'élément g_0 peut évidemment être construit par la règle 3 de F_1. Si $g_1, \cdots, g_n$ ont été construits, on a $x_{g_n} = \square$. Par la règle 2 de F_1, il existe au plus un élément s_1 de $\{a, b, a^{-1}, b^{-1}\}$ tel que $x_{g_n s_1} \neq \square$. On a par construction un élément $s_2 \in \{a, b, a^{-1}, b^{-1}\}$ tel que $g_n s_2 = g_{n-1}$. Prenons $s_3 \in \{a, b, a^{-1}, b^{-1}\}$ tel que $s_3 \neq s_1$ et $s_3 \neq s_2$. Puisque $\mathbb{F}_2$ est acyclique, on a $g_n s_3 \neq g_k$ pour tout $k \leq n$. On peut donc poser $g_{n+1} = g_n s_3$. □

On considère maintenant le jeu de tuiles de Wang W_2 figure 4.

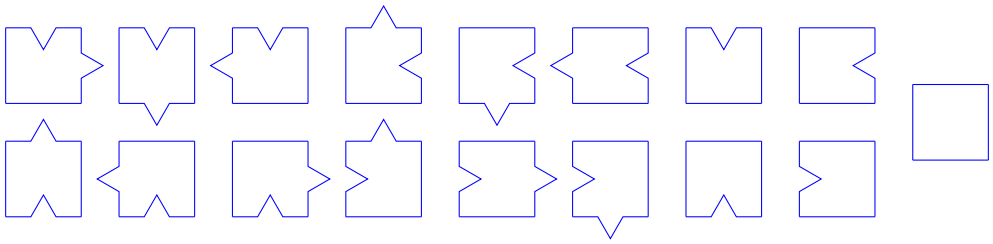


FIGURE 4 : Jeu de tuile W_2, une configuration dans ce sous-shift est formé de chemin simple semi infini qui ne s'intersecte pas.

On définit l'automate cellulaire F_3 opérant sur X_2 sur la couche $B = W_2 \times (op = \{a, b, a^{-1}, b^{-1}, \square\})$ (avec les projections π_{W_2} et π_{op}), défini par :

$$F_3(c)_i = \begin{cases} \square & \text{si } c_i \text{ est témoin d'une erreur dans son voisinage direct} & (1) \\ \square & \text{si } c_i = \square \wedge \pi_{op}(c_{ib}) = x & (2) \\ \square & \text{si } c_i = \square \wedge \pi_{op}(c_{ib^{-1}}) = x & (3) \\ \square & \text{si } c_i = \square \wedge \pi_{op}(c_{ia^{-1}}) = x & (4) \\ \square & \text{si } c_i = \square & (5) \\ \square & \text{si } \pi_{W_2}(c_i) = \square \wedge \pi_{op}(x_{ib}) = x & (6) \\ \square & \text{si } \pi_{W_2}(c_i) = \square \wedge \pi_{op}(c_{ib^{-1}}) = x & (7) \\ \square & \text{si } \pi_{W_2}(c_i) = \square \wedge \pi_{op}(c_{ia^{-1}}) = x & (8) \\ \square & \text{si } c_{ib} \in \{\square, \square, \square, \square\} \wedge x = b^{-1} \wedge c_i \text{ n'est pas marquée dans } X_2 & (9) \\ \square & \text{si } c_{ib^{-1}} \in \{\square, \square, \square, \square\} \wedge x = b \wedge c_i \text{ n'est pas marquée dans } X_2 & (10) \\ \square & \text{si } c_{ia^{-1}} \in \{\square, \square, \square, \square\} \wedge x = a \wedge c_i \text{ n'est pas marquée dans } X_2 & (11) \\ \square & \text{si } c_{ia} \in \{\square, \square, \square, \square\} \wedge x = a^{-1} \wedge c_i \text{ n'est pas marquée dans } X_2 & (12) \\ \square & \text{sinon} & (13) \end{cases} \quad (12)$$

Encore une fois toutes ses règles sont données pour le générateur a mais sont symétriques le long de chaque axe.

Le fonctionnement de cet automate est le suivant, d'abord il converge vers une configuration valide de W_2 c'est a dire des chemin simple semi infini qui ne s'intersecte pas. Ensuite chaque élément de op est une opération qui encode une direction. A chaque étape la tête du chemin (son extrémité) est décalé dans la direction correspondant à la direction a l'extrémité et les reste des opérations sont décalé en suivant le chemin. Les règles $9, 10, 11$ et 12 s'assure simplement que la tête ne peut pas pénétrer un obstacle.

Proposition 7.9. *L'automate cellulaire F_3 opérant sur X_2 est nilpotent sur les configurations finies.*

Démonstration. Les tuiles valides différentes de □ forment des chemins puisque chaque tuile doit avoir un successeur et un prédécesseur. Puisque $\mathbb{F}_2$ est acyclique, les chemins valides ne peuvent pas former de boucles. Comme les tuiles □, □, □, □ ne font pas partie du jeu, il vient qu'un chemin valide doit être infini. Si x est une configuration avec un nombre finie de cellules non □, alors il ne possède pas de chemin infini. La règle 1 de F_3 élimine alors les erreurs. □

Proposition 7.10. *Étant donnée une configuration avec un nombre finie de cellules non □, c, pour tout $i \in \mathbb{F}_2$ tel que $c_i =$ □, il existe $y \in [c|_K]$ (où K est fini et contient toutes les cellules non □ de c) et n tel que*

$$F_3^n(y)_i \in \{\boxed{x}, \boxed{x}, \boxed{x}, \boxed{x}\}.$$

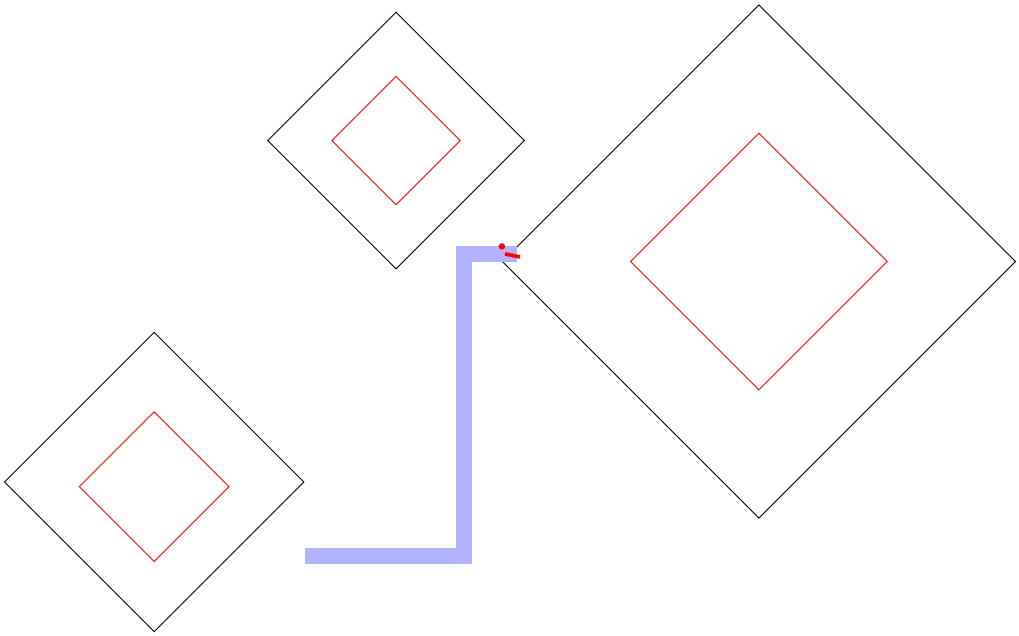


FIGURE 5 : Schéma représentant une chemin tracé permettant d'introduire un machine de Turing et du calcul dans un obstacle situé au milieu d'une mer d'obstacle. Le carré rouge est la partie protégé de l'obstacle (marqué) tandis que le reste de l'obstacle est la partie dans lequel évolue la machine de Turing.

Démonstration. Puisque F_3 est nilpotent sur les configurations finies, il existe N tel que $F_3(c)_k =$ □ pour tout k. Prenons $y \in B_N(x)$. La Proposition 7.8 nous donne l'existence d'un chemin infini g_n partant de i ; puisque g_n ne s'intersecte jamais et que B_N est fini, il existe N' tel que pour tout $n \geq N'$, $d(g_n, \varepsilon) > N$. On pose alors y comme la configuration où $g_{n \geq N'}$ est déjà tracé et où $g_{n<N'}$ est encodé via *op*. Les règles 2 à 12 nous assurent que

$$F_3^{N'}(y)_i \in \{\boxed{x}, \boxed{x}, \boxed{x}, \boxed{x}\}.$$

La construction est représenté figure 5. □

Étant donné une machine de Turing (Q, S, δ), on définit l'automate cellulaire T opérant sur X_2. On donne une description de haut niveau. T travaille sur la couche $(Q \cup \square) \times (S \cup \square)$.

1. Une tête de machine de Turing (un élément de Q) se trouve sur les tuiles de W_2 différentes de $\square$.
2. Lorsqu'une cellule $\boxed{x}$, $\boxed{x}$, $\boxed{x}$, $\boxed{x}$ entre dans une boule (composante connexe non blanche du sous-shift X_2), une machine de Turing est ajoutée sur la cellule dans l'état initial.
3. Lorsqu'elles sont introduites dans une boule de rayon n, les machines calculent en utilisant $\frac{n}{4}$ comme entrée, c'est-à-dire la longueur entre le bord et la première case marquée. Elles utilisent les cellules de W_2 différentes de $\square$ comme ruban.
4. Si deux têtes se rencontrent, elles sont détruites.
5. Si une tête s'arrête, alors elle introduit une erreur dans X_2, ce qui provoquera l'effacement de la boule.

Remarque 11. *Le calcul peut prendre un espace arbitraire puisque la sensibilité demande l'existence d'une configuration et il est toujours possible de choisir une configuration ou le chemin construit par la proposition 7.10 est infini. Par la règle* 3 *la machine a donc un espace potentiel infini.*

Remarque 12. *Encore une fois, cet automate cellulaire n'est pas à proprement parler un automate cellulaire sur X_2 puisque, de par la règle 5, il peut modifier la structure de X_2 ; cependant il est utile de le voir comme un automate cellulaire sur X_2 jusqu'à ce que cette règle se déclenche. On pourrait néanmoins poser l'automate cellulaire*

$$T' = T \circ F_3 \circ F_2 \circ F_1.$$

Proposition 7.11. *Toute propriété de F_1, F_2 ou F_3 vraie pour les orbites des configurations finies à partir d'un certain rang reste vraie dans les couche correspondante de l'automate cellulaire T'.*

Démonstration. En effet, chaque automate cellulaire agit sur sa propre couche indépendante, excepté pour rajouter du blanc. Le support est donc strictement décroissant, ce qui veut dire qu'il est stationnaire à partir d'un certain rang puisqu'il est fini. On peut donc appliquer la propriété relative à F_1, F_2 ou F_3 en question. □

Démonstration du Théorème A. Étant donné $M_e = (Q, S, \delta)$ une machine de Turing et T' l'automate cellulaire associé que nous venons de construire.

Si $e \notin COF$, alors il existe une suite croissante $(r_n)_n$ telle que M_e ne s'arrête sur aucun r_n. Considérons le motif $\pi \in W_1^{B_{4r_n}}$ de X_2 où toutes les cellules sont différentes de $\square$ et $\boxtimes$ est en 0 et ou toutes les cellules sont $\square$ sur les couches autres que W_1. On sait que ce motif reste inchangé sous l'action de l'automate cellulaire F_2 par la Proposition 7.7. Donc seul l'automate cellulaire T peut introduire un changement. Or la boule de rayon $\frac{3r_n}{4}$ est inaccessible si le motif n'est pas effacé. Le motif ne peut être effacé que si M_e s'arrête sur r_n ou que le calcul est mal initialisé. Or le calcul est nécessairement bien initialisé puisque, pour lire l'entrée, il faut entrer dans le motif, ce qui provoque son initialisation par la règle 2. Donc π est un mot bloquant et l'automate cellulaire n'est pas sensible.

Si $e \in COF$, alors il existe N tel que pour tout $r \geq N$, M_e s'arrête sur r. Pour tout motif fini π, par la Proposition 7.7 l'action de F_2 stabilise le motif en un ensemble de boules de rayons différents.

Pour g le centre d'une boule de rayon $r \geq 4N$, par la Proposition 7.10, il existe un élément y dans $[\pi]$ et n tel que

$$F_3^n(y)_{ga^r} \in \{\boxed{x}, \boxed{x}, \boxed{x}, \boxed{x}\}.$$

On peut alors introduire du calcul dans la boule qui utilisera la tuile de W_2 pour calculer. Le ruban étant infini et M_e s'arrêtant sur r, la boule finira par être effacée. Donc π ne contient aucune zone protégée contenant une boule de rayon supérieur à $4N$. Ce qui prouve que π n'est pas un mot bloquant et que l'automate cellulaire est sensible. □

7.2 Point d'équicontinuité

L'objectif de cette sous section de prouver le théorème B.

Proposition 7.12. *L'existence de points d'équicontinuité est une propriété* Σ_1^1.

Démonstration. L'existence de points d'équicontinuité s'écrit

$$\exists x, \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall i \geq 0, \operatorname{diam}\big(F^i(B_\delta(x))\big) < \varepsilon.$$

où

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall i \geq 0, \operatorname{diam}\big(F^i(B_\delta(x))\big) < \varepsilon$$

est une propriété arithmétique puisque pour simuler l'automate cellulaire jusqu'à l'étape i on peut ne regarde que des motifs finis dans la boule de rayon $r \cdot i$ où r est le rayon de l'automate. C'est la même technique que nous avons utilisé pour la sensibilité. Cela prouve la proposition. □

Afin de prouver ce théorème, nous allons reprendre la construction précédente et la modifier légèrement. Si la non sensibilité correspond pour les automates cellulaires à l'existence de mots bloquants arbitrairement grands, un point d'équicontinuité pour un automate cellulaire correspond à une hiérarchie infinie de mots bloquants imbriqués les uns dans les autres.

Proposition 7.13. *Si x est un point d'équicontinuité pour un automate cellulaire F, alors pour tout $\pi \sqsubset x$ sous-motif de x, il existe $\Pi \sqsubset x$ sous-motif de x tel que Π est bloquant et $\pi \sqsubset \Pi$ est dans la zone protégée de x (cf 7.1).*

Démonstration. x est un point d'équicontinuité si pour tout m, il existe n tel que pour tout $y \in [x|B_n]$, pour tout k, on ait

$$F^k(y) \in [F^k(x)|B_m].$$

Donc pour tout m, x contient un mot bloquant de taille m. Cela prouve la propriété. □

Remarque 13. *Cette proposition montre en fait que les points d'équicontinuité forment une hiérarchie infinie de mots bloquants.*

On va reprendre la construction précédente en changeant quelques détails.
Premièrement, l'automate cellulaire F_1 devient

$$F_1(x)_i = \begin{cases} \square & \text{si } x_i \in \{\square, \square, \square, \square\} \wedge x_i x_{ib} \text{ est invalide} & (1)\\ \square & \text{si } x_i \in \{\square, \square, \square, \square\} \wedge x_i x_{ia} \text{ est invalide} & (2)\\ \square & \text{si } x_i \in \{\square, \square, \square, \square\} \wedge x_i x_{ib^{-1}} \text{ est invalide} & (3)\\ \square & \text{si } x_i \in \{\square, \square, \square, \square\} \wedge x_i x_{ia^{-1}} \text{ est invalide} & (4)\\ \square & \text{s'il existe } s_1, s_2 \in \{a, a^{-1}, b, b^{-1}\} \text{ tels que } x_{is_1} = \square \wedge x_{is_1s_2} \neq \square \wedge s_1 s_2 \neq \varepsilon & (5)\\ \square & \text{si } x_i \in \{\square, \square, \square, \square\} \text{ et s'il existe } s \in \{a, a^{-1}, b, b^{-1}\} \text{ tel que } x_{is} \in \{\square, \square, \square, \square\} & (6)\\ x_i & \text{sinon} & (7) \end{cases}$$

(13)

Cela revient à dire que les laissent de □ qui se répandent le long des chemins. En effet selon ces règles, le motif Figure 6 est invalide dans X_1 mais est stable par l'action de F_1.

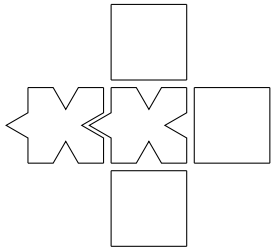


FIGURE 6 : Un motif invalide dans le sous-shift X_1 mais qui est stable par l'action de l'automate F_1 car les erreurs ne sont détectées que de l'intérieur vers l'extérieur.

On change également F_2 l'automate chargé de marquer les zones protégées. En effet on doit maintenant marquer une hiérarchie d'obstacles ce que n'est pas réalisable aisément avec des particules. La couche de F_2 devient $Q \times \{a, a^{-1}, b, b^{-1}, 0, 1\} \times \{0, 1\}$, où Q est l'ensemble des états d'une machine de Turing dont nous allons décrire le fonctionnement.

On définit maintenant le fonctionnement de la machine de Turing sur l'alphabet $\{a, a^{-1}, b, b^{-1}, 0, 1\} \times \{0, 1\}$: la machine explore tous les chemins dans le graphe depuis la racine, donc les mots sur l'alphabet $\{a, a^{-1}, b, b^{-1}\}$, et vérifie si tous les chemins menant à un marqueur sont de la même taille. Elle écrit ensuite en unaire la taille du rayon de la boule. Puis elle recommence jusqu'à trouver un autre anneau de cellules marquées, vérifie si l'anneau est bien une sphère puis écrit à l'extérieur, en unaire, la taille du premier anneau et du deuxième séparées par des 0, et ainsi de suite. Si un anneau n'est pas une sphère, la machine introduit une erreur, de même s'il n'y a pas assez de place entre deux anneaux pour écrire les tailles. Elle vérifie également la contrainte que $r_{n+1} = 2r_n$ ou $r_{n+1} = 2r_n + 1$. Lorsque la machine a fini, elle réinitialise son ruban de travail $\{a, a^{-1}, b, b^{-1}, 0, 1\}$ et recommence son algorithme.

Finalement, l'entrée de la machine dans T est maintenant l'entrée vide avec comme oracle la suite x_n définit par

$$\begin{cases} x_0 = 1 & \\ x_{n+1} = 1 & \text{si } r_{n+1} = 2r_n + 1 \\ x_{n+1} = 0 & \text{si } r_{n+1} = 2r_n \end{cases} \tag{14}$$

où $r_1, r_2, r_3, \ldots$ sont les rayons des sphères qui ont été écrits par F_2. La figure 7 illustre cette construction.

Lemme 7.14. *La machine de Turing qui vérifie la consistance des boules et écrit les rayons dispose de suffisamment d'espace.*

Démonstration. Le calcul d'une boule dans un arbre s'effectue par un parcours en profondeur. Or un tel parcours utilise un espace linéaire en la profondeur de l'arbre considéré. Ainsi, la machine de Turing dispose de suffisamment d'espace à l'intérieur même de l'obstacle pour effectuer ce calcul. □

Lemme 7.15. *Tout obstacle invalide est détecté en temps fini par la machine de Turing.*

Démonstration. Si la machine est bien initialisée, alors l'obstacle invalide est détecté par définition. Sinon, si la machine est mal initialisée et ne détecte pas correctement un obstacle lors d'un cycle donné, elle finit néanmoins par se réinitialiser. En effet, les rayons successifs ont des tailles attendues, chacune étant le double de la précédente, de sorte que chaque cycle de détection s'exécute en temps

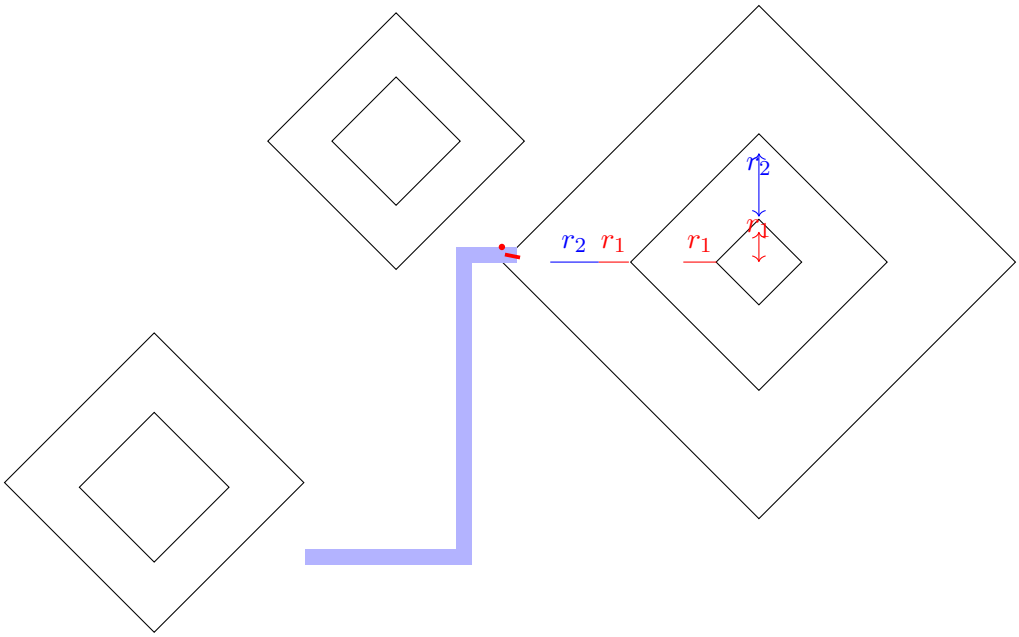


FIGURE 7 : Schéma représentant une chemin tracé permettant d'introduire un machine de Turing et du calcul dans un obstacle situé au milieu d'une mer d'obstacle. Chaque obstacle est une hiérarchie d'obstacle dont les rayons sont écris dans l'obstacle suivant et servent d'oracle partiel à la machine de Turing.

borné. Par conséquent, la machine se réinitialise correctement et détecte l'obstacle invalide au cycle suivant. □

Preuve du Théorème B. On réduit le problème RTOT, le problème des machines qui s'arrêtent sur l'entrée vide pour tout oracle. D'après la Proposition 7.7 on sait que les seul mot bloquant sont des boules marquées. Si $e \notin RTOT$ alors on peut utiliser cet orcale pour encoder une hiérarchie infini de mot bloquant qui ne seront jamais détruit.

Si $e \in RTOT$ alors pour tout oracle e s'arrête en temps finis sur la configuration vide avec cette oracle donc la machine e n'utilise qu'une partie finie de l'oracle. Étant x une configuration formé d'une hierarchie infini de mot bloquant, donc un potentiel point d'équicontinuité, x encode un oracle si e s'arrete sur l'entrée vide avec n element de l'oracle alors la hierarchie peut toujours être detruite à partir du n-ème mot bloquant. Donc x n'est pas un point d'équicontinuité.

□

Corollaire 7.16. *Il existe des automates cellulaire sur $\mathbb{F}_2$ non sensible aux conditions initiale mais sans aucun point d'équicontinuité.*

Démonstration. Cela découle directement du fait que si l'une était la négation de l'autre alors les deux propriété serait au même niveau de la hiérarchie. On peut toutefois donné un tel exemple plus explicitement, soit e une machine qui s'arrête sur tout les oracle mais nécessite au moins deux élément de chaque oracle pour s'arrêter. Cela nous permet de consruire un automate cellulaire sans point d'équicontinuité puisque dans RTOT mais avec des mots bloquant arbitrairement grand. □

Corollaire 7.17. *Il existe des automates cellulaire sur $\mathbb{F}_2$ qui ont des points d'équicontinuité mais dont aucun point d'équicontinuité n'est calculable*

Démonstration. Il existe une machine de Turing à oracle M_e telle que le complémentaire $(W_e^{\mathcal{O}})^c$ ne contienne aucun élément calculable. En appliquant notre construction à cette machine, on en déduit que ses points d'équicontinuité ne sont pas calculables, puisque la connaissance d'un tel point permettrait de construire un tel oracle. □

8 Perspectives futures

Cette section compile des résultats que nous avons obtenus mais que nous n'avons pas encore écris parfaitement formellement. Les preuves y seront donc moins détaillées.

8.1 Groupes non moyennable

Dans toute cette sous section, G est un groupe non moyennable et on fixe une action par quasi-translation de $\mathbb{F}_2$. On commence par énoncer le lemme suivant.

Définition 8.1 (Bord arborescent)**.** *Soit G un groupe, un ensemble $F \subset G$ (éventuellement infini) est dit à **bord arborescent** si, en notant*

$$E = \{x \in F \mid \exists y \notin F,\ d(x,y) \leq k\}$$

Il existe une application $f : E \to \mathcal{P}_3(G \setminus F)$ (où $\mathcal{P}_3$ désigne d'ensemble des partie à 3 éléments) telle qu'on ai les deux point suivant

- *Pour tout $e_1, e_2 \in E$, $f(e_1) \cap f(e_2) = \emptyset$*
- *Si $f(e) = (a,b,c)$, alors $d(e,a) \leq k$, $d(e,b) \leq k$, $d(e,c) \leq k$*

Lemme 8.2 (Lemme de circulation)**.** *Soit G un groupe non moyennable. Alors il existe $k \geq 1$ tel que, pour tout sous-ensemble $F \subset G$ a bord arborescent, pour tout $y \in G \setminus F$, il existe une suite $(y_n)_{n\geq 0}$ d'éléments deux à deux distincts de $G \setminus F$ telle que $y_0 = y$ et $d(y_n, y_{n+1}) \leq 2k$ pour tout $n \geq 0$.*

Démonstration. Soit T une action par quasi-translation de $\mathbb{F}_2$ sur G. Posons $k = \max\{d(g, T^s g) \mid g \in G,\ s \in \{a, b, a^{-1}, b^{-1}\}\}$. Fixons $F \subset G$ vérifiant l'hypothèse du lemme et soit $y \in G \setminus F$.

Notons $\Gamma = T \cdot G$ l'orbite de G, munie de sa structure de graphe, et soit Γ_y la composante connexe de y dans $\Gamma \setminus F$.

Si Γ_y est infinie, il suffit de choisir dans Γ_y un chemin infini simple issu de y. Deux sommets adjacents dans Γ sont à distance au plus k dans G. Supposons maintenant Γ_y finie. Notons

$$\partial\Gamma_y = \{x \in \Gamma \setminus \Gamma_y \mid x \text{ est adjacent à un sommet de } \Gamma_y\}.$$

Comme Γ_y est la composante connexe de y dans $\Gamma \setminus F$, on a $\partial\Gamma_y \subset F$. De plus, tout élément de $\partial\Gamma_y$ est à distance au plus k d'un sommet de $\Gamma_y \subset G \setminus F$, donc $\partial\Gamma_y \subset E$.

Par la propriété le Lemma 3.10,on a

$$|\partial\Gamma_y| > 2|\Gamma_y|.$$

L'application f étant injective sur $\partial\Gamma_y$, $f(\partial\Gamma_y)$ contient strictement plus de $2|\Gamma_y|$ éléments. Il existe donc $(a,b,c) = f(e)$ avec $e \in \partial Gamma_y$ tel que a, b ou c ne sont pas dans $Gamma_y$. Par symétrie supposons que c'est a. On a $d(a,e) \leq k$. Comme e est adjacent à Γ_y dans Γ, il est à distance au plus k d'un sommet de Γ_y. Ainsi $d(a, \Gamma_y) \leq 2k$.

Soit alors Γ_a la composante connexe de a dans $\Gamma \setminus F$. Si Γ_a est infinie, on conclut comme plus haut. Sinon, on recommence le même raisonnement avec $\Gamma_y \cup \Gamma_a$, puis par récurrence. À chaque étape, on ajoute au moins un nouveau sommet de $G \setminus F$ à distance au plus $2k$ de l'ensemble précédent. □

On fixe une action par quasi-translation de $\mathbb{F}_2$ sur G, et on considère le sous-shift de type fini T suivant : chaque élément $g \in G$ pointe vers trois de ses voisins à distance au plus k, et est lui-même pointé par exactement un de ses voisins à distance au plus k, ou bien ne pointe vers personne, tout en pouvant être pointé par au plus un voisin. Autrement dit, les configurations de T décrivent des morceaux de la quasi-translation, plongés dans un océan de symboles blancs.

Remarque 14. *Puisqu'un sous-shift est fermé, il n'y a a priori aucune raison pour que tous ses éléments représentent globalement des morceaux valides de la quasi-translation. Il peut donc exister de nombreuses configurations qui ne sont que localement valides.*

Considérons maintenant l'automate cellulaire F_1 défini par

$$F_1(x)_i = \begin{cases} \square & \text{s'il y a une erreur dans le SFT} \\ \square & \text{s'il existe } j \text{ tel que } d(i,j) \leq k,\ x_j = \square \text{ et } x_i \text{ ne pointe pas vers trois cellules blanches} \\ x_i & \text{sinon} \end{cases} \tag{15}$$

Cet automate cellulaire fait converger les configurations vers des configurations valides de T, avec en plus la contrainte suivante : si l'un des voisins à distance au plus k d'une cellule non blanche est blanc, alors cette cellule doit pointer vers trois cellules blanches.

On considère ensuite F_2, l'automate cellulaire qui simule l'automate cellulaires de la section 7 sur les portions valides de $\mathbb{F}_2$. Plus précisément, si une cellule voit dans son voisinage de rayon $r \cdot k$, où r est le rayon de F et k le rayon de la quasi-translation, que la quasi-translation est correctement dessinée autour d'elle, alors elle applique la règle locale de F. En revanche, si une cellule voit un bord de quasi-translation ou une erreur, alors son état reste inchangé.

Enfin, on définit F_3 de manière analogue à la section précédente : à partir d'une suite de déplacements et d'opérations, cet automate permet de transmettre de l'information dans le groupe.

Schéma de preuve d'une généralisation des Théorèmes A, B et C. Par la deuxième règle de F_1, on obtient exactement l'hypothèse du lemme de circulation. En appliquant ce lemme, on voit que les seuls obstacles possibles sont constitués de morceaux de quasi-translation recouvrant une boule.

De tels obstacles existent, puisque l'on dispose d'une quasi-translation de $\mathbb{F}_2$ sur G. En particulier, toute boule de G peut être recouverte par un tel morceau. On peut alors tronquer ce morceau de manière à ne recouvrir que la boule considérée, tout en respectant la deuxième règle de F_1, qui est nécessaire pour appliquer le lemme de circulation.

Ces obstacles sont alors des obstacles pour la dynamique sur G si et seulement s'ils sont des obstacles pour la dynamique de l'automate sur $\mathbb{F}_2$ qu'il simule.

Par conséquent, tous les résultats obtenus sur $\mathbb{F}_2$ se transmettent à G. Cela donne les conclusions annoncées pour la sensibilité, l'équicontinuité et la dichotomie. □

8.2 Groupes à un bout

L'objectif de cette sous-section est de prouver quelques lemmes préliminaires à l'études des groupes à un bout et de donner un schéma de preuve pour obtenir un résultat analogue à la partie précédentes dans le cadres de cette famille de groupe. Dans toute la suite de cette section, G est un groupe finiement engendré, à un bout quelconque. On rappelle le théorème de Seward suivant.

Théorème 8.3. *Un groupe à un bout admet un graphe de Cayley avec un chemin Haliltonien bi infini.*

Une première idée que nous pourrions avoir est de tracé un $\mathbb{Z}$-sunny side up. Puisque le chemin est habiltonien, en particulier il y a des chemins partiels qui couvrent chaques boules et donc on peut forcer l'existence d'un centre par boules. Le problème en revanche est : comment traiter les cas dégénéré, 2 centre par exemple.

Le problème du mot décidable est en fait nécessaire avec cette technique et nous montrons pourquoi dans la proposition suivante. Considérons un groupe G et le sous-shift S sur l'alphabet $A = \{0, 1, 1^*\}$ et sur le groupe G qui interdit les composante connexe de 1 qui n'ont pas exactement un $1*$.

Proposition 8.4. *Le sous-shift S est effectif si et seulement si G a un problème du mot CO-semi-décidable.*

Démonstration. Si G a un problème du mot CO-semi-décidable alors pour tout motif dans $\pi \in A^{B_n}$ ou B_n est la boule de rayon n centré en ε, pour tout mot $w = s_{i_1} \cdots s_{i_k}$ avec $k \leq n$, une machine de Turing peut vérifier si $\pi_{s_{i_1} \cdots s_{i_j}} = 1$. De plus si $\pi_\varepsilon = 1*$ et $\pi_w = 1^*$ la machine semi decide si $w \neq \varepsilon$ et déclare le motif invalide si oui.

Si le sous-shift est effectif alors, soit w un mot de taille n. Énumérons les motifs $\pi \in A^{S^{\leq n}}$, (un motif est donné en donnant tout les mot de taille au plus n en les générateur) et tels que pour tout $w' = s_{i_1} \cdots s_{i_k}$ avec $k \leq n$ on ai $\pi_{w'} \in \{1, 1^*\}$, $\pi_\varepsilon = 1^*$ et $\pi_w = 1^*$. On peut semi decider pour chaque motif si π est invalide. Si tout les motifs sont invalides, on peut renvoyer que $w \neq \varepsilon$ puisque comme le sous-shift est non vide, il existe des remplissage des boules avec 1^* en position ε.

□

Définition 8.5 (Dilatation)**.** *Soit G un groupe finiment engendré, à un bout, on définit la fonction de dilatation* th : $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *par*

$$\mathrm{th}(r) = \max\left\{\rho \in [0, \dots, r] \middle| \forall x, y \in B_r(\varepsilon) \backslash B_\rho(\varepsilon), \exists \text{ un chemin de } x \text{ à } y \text{ contenu dans } B_r(\varepsilon) \backslash B_\rho(\varepsilon)\right\}.$$

Ou de manière équivalente par

$$\mathrm{th}(r) = \max\left\{\rho \in [0, \dots, r] \middle| \exists r' \leq r, \forall x, y \in S_{r'}(\varepsilon), \exists \text{ un chemin de } x \text{ à } y \text{ contenu dans } B_r(\varepsilon) \backslash B_\rho(\varepsilon)\right\}.$$

La proposition suivante montre que les deux définitions sont équivalentes.

Proposition 8.6. *Si G est un groupe et r, ρ des entiers, les proposition suivante sont équivalente*

1. $\exists r' \leq r, \forall x, y \in S_{r'}(\varepsilon), \exists$ *un chemin de x à y contenu dans* $B_r(\varepsilon) \setminus B_\rho(\varepsilon)$
2. $\exists r' \leq r, \forall x, y \in B_r(\varepsilon) \setminus B_{r'}(\varepsilon), \exists$ *un chemin de x à y contenu dans* $B_r(\varepsilon) \setminus B_\rho(\varepsilon)$

Démonstration. La proposition (2) implique (1). De plus si il existe r' tel que pour tout x, y dans $S_{r'}$ il y a un chemin de x à y dans B_r qui évite B_ρ alors pour tout element réduit $w = x_1 \cdots x_{k_1+r'}$ et $y = y_1 \cdots y_{k_2+r'}$ $x' = x_1 \cdots x_{r'}$ et $y' = y_1 \cdots y_{r'}$ sont dans $S_{r'}$ et joignable par un chemin qui évite B_ρ car x et y ont été pris réduit. En appliquant (1) et en concaténant les chemin on obtient un chemin de x à y qui évite B_ρ. □

Proposition 8.7. *Soit G un groupe finiment engendré dont le problème du mot est décidable. Alors la fonction* th *est recursive.*

Démonstration. Fixons $r \in \mathbb{N}$. Comme G est finiment engendré, l'ensemble $B_r(\varepsilon)$ est fini. Puisque le problème du mot dans G est décidable, on peut énumérer tous les mots de longueur au plus r et construire la boule $B_r(\varepsilon)$ et la sphère $S_r(\varepsilon)$ ainsi que, pour tout $\rho \in [0, \dots, r]$, le sous-graphe induit par $B_r(\varepsilon) \setminus B_\rho(\varepsilon)$.

Pour chaque ρ, on teste alors si tous les sommets de $S_r(\varepsilon)$ appartiennent à une même composante connexe de ce sous-graphe. Comme il n'y a qu'un nombre fini de valeurs possibles pour ρ, il vient que $\mathrm{th}(r)$ est calculable. □

Proposition 8.8. *Soit G un groupe à un bout, pour tout n, $G \setminus B_n$ ne possède qu'une seule composante connexe infinie et un nombre fini de composantes connexes finies.*

Démonstration. Comme G est connexe, toute composante connexe finie est connectée à B_n comme B_n est finie et que deux composante connexe finie ne peuvent pas être connectée à B_n via la même arrête sortante de B_n autrement elle formerai une seule composante connexe finie, il vient qu'il n'y qu'un nombre finie de composantes connexes finies. □

Proposition 8.9. *Soit G un groupe à un bout et n, $G \setminus B_n$ ne possède qu'une seule composante connexe infinie. Il existe $m \geq n$ tel que pour tout $x, y \in G$ tel que $|x| > m$ et $|y| > m$, x et y sont dans la même composante connexe.*

Démonstration. Par la proposition précédente, pour tout n il n'y a qu'un nombre fini de composante connexe finie. Donc il existe m tel que B_m contient toute les composante connexe finie. Par conséquent pour tout $x, y \in G$ tel que $|x| > m$ et $|y| > m$, x et y appartiennent à la composante connexe infinie. □

Proposition 8.10. *Soit G un groupe à un bout, la fonction* th *tend vers l'infinie.*

Démonstration. Soit N un entier, puisque G est à un bout, par la proposition précédente il existe m tel que pour tout x et y dans $S_m(\varepsilon)$, x et y sont dans la même composante connexe. Posons

$$M = \max_{\gamma \text{ géodésique de } x \text{ à } y \text{ dans } G \setminus B_N(\varepsilon)} \left(\max_i \left(d(\gamma_i, \varepsilon) \right) \right)$$

Un tel maximum existe car $S_m(\varepsilon)$ est fini. Tout les chemins reliant des éléments de la sphère $S_m(\varepsilon)$ et évitant la boule $B_N(\varepsilon)$ sont contenus dans $B_M(\varepsilon)$. En prenant la définition alternative de th on a $\mathrm{th}(M) \geq N$.

□

Les propositions de cette sous-section montrent, d'une part, qu'il est possible de construire des obstacles en forme de boules dans les groupes à un bout avec problème des mots décidable et, d'autre part, qu'il est possible de créer une membrane autour des obstacles, permettant à l'information de les contourner. Ces deux points, mis ensemble, nous permettent en théorie de construire un automate cellulaire dont les mots bloquants sont tous des boules marquées dans le graphe de Cayley et tel qu'il existe des mots bloquant arbitrairement grand. Sous réserve de lemmes techniques, on espère pouvoir appliquer les mêmes techniques de preuve pour obtenir des résultats analogues à ceux de la section 7.

9 Conclusion

J'aimerais terminer sur une note plus personnelle, au-delà des résultats mathématiques présentés dans ce rapport. Ce stage était pour moi à la fois l'aboutissement de mon parcours scolaire et le début de mon parcours dans la recherche. Le cahier des charges initial était de déterminer la complexité, dans la hiérarchie arithmétique, des classes de Kůrka sur le groupe libre. Nous avons pu obtenir un théorème de classification précis. Ce travail constitue pour moi une grande satisfaction. Au-delà du théorème lui-même, je suis particulièrement contente des constructions développées au cours du stage, pour leur aspect esthétique.

Ce travail m'a également permis d'aborder et de mieux comprendre ce que représente la recherche en mathématiques et en informatique. J'ai appris à lire des articles, à rédiger proprement et régulièrement mes idées, ainsi qu'à les exposer au tableau. J'ai également beaucoup réfléchi aux hésitations et aux retours en arrière qui accompagnent naturellement le développement d'une preuve. Certaines erreurs nous ont parfois beaucoup fait reculer, et avaient même échappé, dans un premier temps, à mes tuteurs de stage. Cela m'a appris que les erreurs font pleinement partie du processus de recherche même pour que des mathématicien.nes expérimenté.es et qu'il ne faut donc ni se décourager ni se laisser distraire par ces difficultés.

Sur le plan personnel, ce stage m'a appris l'importance de ne pas me disperser ni laisser submerger par la quantité de choses à faire et à comprendre, mais aussi de maintenir une certaine régularité dans le travail. J'ai en particulier compris combien il était important de bien rédiger ses idées après chaque séance de travail. Enfin, ce stage m'a confortée dans mon désir de poursuivre en doctorat. Le travail que nous avons entrepris a vocation à être poursuivi durant la thèse. J'espère ainsi pouvoir approfondir les questions ouvertes par ce stage et continuer à m'inscrire dans cette démarche de recherche qui vient juste de commencer.

Références

[AT26] Jade Angela Hope Audouard and Guillaume Theyssier. On kůrka's dichotomy for cellular automata on groups, 2026.

[Ban71] Edwin R Banks. *Information processing and transmission in cellular automata.* PhD thesis, Massachusetts Institute of Technology, 1971.

[Bit24] Nicolás Bitar. *Subshifts of Finite Type on Groups : Emptiness and Aperiodicity.* Thèse de doctorat, Université Paris-Saclay, 2024.

[Bou07] Nicolas Bourbaki. *Topologie générale. Chapitres 1 à 4.* Éléments de mathématique. Springer, Berlin, 2007.

[Bur66] Arthur W. Burks, editor. *Theory of Self-Reproducing Automata by John von Neumann.* University of Illinois Press, Urbana, IL, 1966.

[CSC10] T. Ceccherini-Silberstein and M. Coornaert. *Cellular Automata and Groups.* Springer Monographs in Mathematics. Springer Berlin Heidelberg, 2010.

[dlSBGR20] Luguis de los Santos Baños and Felipe García-Ramos. Mean equicontinuity and mean sensitivity on cellular automata, 2020.

[dlSBGR21] Luguis de los Santos Baños and Felipe García-Ramos. Diameter mean equicontinuity and cellular automata, 2021.

[Gác01] Peter Gács. Reliable cellular automata with self-organization. *Journal of Statistical Physics*, 103(1) :45–267, 2001.

[Hed69] Gustav A. Hedlund. Endomorphisms and automorphisms of the shift dynamical system. *Mathematical Systems Theory*, 3 :320–375, 1969.

[Kůr97] Petr Kůrka. Languages, equicontinuity and attractors in cellular automata. *Ergodic Theory and Dynamical Systems*, 17(2) :417–433, April 1997.

[Kůr01] Petr Kůrka. Topological dynamics of cellular automata. In Brian Marcus and Joachim Rosenthal, editors, *Codes, Systems, and Graphical Models*, pages 447–485, New York, NY, 2001. Springer New York.

[Kůr03] P. Kůrka. *Topological and Symbolic Dynamics*. Collection SMF. Société mathématique de France, 2003.

[LM95] Douglas Lind and Brian Marcus. *An Introduction to Symbolic Dynamics and Coding*. Cambridge University Press, 1995.

[Pit98] Christophe Pittet. On the isoperimetry of graphs with many ends. *Colloquium Mathematicum*, 78(2) :307–318, 1998.

[Rog87] Hartley Rogers. *Theory of recursive functions and effective computability*. MIT Press, Cambridge, MA, USA, 1987.

[Sew14] Brandon Seward. Burnside's problem, spanning trees, and tilings. *Geometry & Topology*, 18 :179–210, 2014.

[ST11] M. Sablik and G. Theyssier. Topological dynamics of cellular automata : Dimension matters. *Theory Comput Syst*, 48(4) :693–714, 2011.

[Sta68] John R. Stallings. On torsion-free groups with infinitely many ends. *Annals of Mathematics*, 88(2) :312–334, 1968.

[Too80] Andrei L Toom. Stable and attractive trajectories in multicomponent systems. *Multicomponent random systems*, 6 :549–575, 1980.

[Why99] Kevin Whyte. Amenability, bi-lipschitz equivalence, and the von neumann conjecture. *Duke Mathematical Journal*, 99 :93–112, 1999.

[Wol83] Stephen Wolfram. Statistical mechanics of cellular automata. *Rev. Mod. Phys.*, 55 :601–644, Jul 1983.